Synthèse

Chap I

equation linéaire : $a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots a_n x_n = b$

$a, b \in \mathbb{C}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

solution : ensemble qui resp substitué $\to$ égalité

$\{s_1, s_2 \dots s_n\}$

2 système sont equivalent si m ensemble de solutions.

inconsistent = 0 solution

consistent = 1, ∞ solution

matrice coef = $[a_1 \dots a_n]$

matrice augmentée $[a_1 \dots a_n \; b]$

3 operations elementaires : - multiplié par un scalaire $\neq 0$

sur les rangée

- Interchanger

- remplacer par elle mi + un multiple d'une autre.

mi set solution $\iff$ rangé equivalente

matrice echeloné : EF : - rangée zero en dessous

- Chaque entrée a droite de celle du dessus

- dessous une entrée : 0

matrice echelonée reduite : REF : - entrée un + = 1 (pour les rangée non nulle)

- chaque 1 unique valeur $\neq 0$ dans la colonne

Chaque matrice est equivalente a $\underline{\underline{1}}$ EF & REF

pos pivot = entrée 1 REF

colonne pivot = qui a pos pivot

pivot = valeur à la pos pivot.

Made with Goodnotes

Algorithme de réduction

1. 4. $\to$ EF
+5 $\to$ REF

1. colonne à gauche = pivot. pos + haut = pos pivot
2. pivot $\neq 0$
3. opérations élémentaires 0 dans la colonne sauf pos pivot.
4. Ignorer rangée pivot $\to$ recommencer

REF

5. pivot le + à droite, Scaling : 1, 0 dans la colonne au dessus $\to$ répéter.

REF (augmentée) : si rangée type 0 0 a : $\varnothing$ solution $\forall a \neq 0$
si variables libres : ∞ solution
si aucun des deux : solution unique.

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v}$ = grand axe parallélogramme

$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Propriétés addition & addition (sauf inverse)

$\vec{v}_1$ & $\vec{v}_2$ $\Rightarrow$ $\vec{u} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$
La combinaison linéaire.

$\vec{v} = a_1 x_1 + a_2 x_2 \cdots a_n x_n$

b est combinaison linéaire de $\vec{v}$ si le système linéaire a une solut°

ensemble de toutes les combinaisons linéaires : Span $\{\ldots\}$

b est dans span si le système linéaire est consistant

Si les vecteurs dans span $\in \mathbb{R}^3 \to$ combinaison linéaire

sur le même vecteur (si 2 vecteurs plans) 3 = tout

si linéairement indépendant.

$A: m \times n$ $\quad \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \Delta$ $n = n$ si non x obligé

$A\vec{v}$ = combinaison linéaire de $\vec{v}$ par A

$\Rightarrow A\vec{v} = b$ un set de solution que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

énoncé équivalent :

a. $\forall b \in \mathbb{R}^m$, $Ax = b$ a une solution

b. chaque $b \in \mathbb{R}^m$ est une combinaison linéaire des colonnes de A

c. les colonnes de A span $\mathbb{R}^m$

d. A a une position pivot dans toutes les rangées (sauf la dernière si augmentée)

Propriétés distribution → add + scalaire

homogène si passe par l'origine $\Rightarrow Ax = b$ consistent

Solution triviale : $A0 = \vec{0}$

non-triviale $Ax = \vec{0}$ $\quad x \neq 0$

↳ si au moins une variable libre.

Système homogène $\Leftrightarrow$ Span $\{v_1 \dots v_n\}$

→ si solut° unique : Span $\{\vec{0}\}$

forme paramétrique : $[\vec{x}] = s[\vec{u}] + t[\vec{v}]$ $\quad s, t \in \mathbb{R}$

$Ax = b$ (non-homogène) $\Rightarrow [\vec{u}] + \alpha[\vec{x}]$ où $A\vec{x} = 0$

$= Ax = b$

Ensemble solution : droite par $\vec{0u}$ et // à la droite $Ax = 0$

nbre variable libre = dimension 2 → plan ...

Algo set solution : 1. $\longrightarrow$ REF

2. variable basique = variable libres

3. $\vec{x}$ solution typique en f° variable libre

4. $\vec{x}$ = combinaison linéaire de vecteurs sans variable avec variable libre en paramètre.

. linéairement indépendant si $Ax = 0$ n'a que $x = \vec{0}$

. Ensemble $S = \{v_1 \dots v_p\}$ dépendant si au moins $1\ \vec{v}$ = combinaison linéaire d'un autre.

. + $\vec{v}$ que de variable

. $S = \{0\} \longrightarrow$ dépendant

Transformation (T) = appl qui associe à vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur $Ax \in \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^n$ = domaine de T

$\mathbb{R}^m$: co-domaine

$\vec{x} \Rightarrow T(\vec{x})$ = vecteur image.

A $n \times m$

transformat° est linéaire si :

i) $T(u+v) = Tu + Tv \quad \forall u, v \in \operatorname{dom} T$

ii) $T(cu) = c(Tu) \quad \forall u \in \operatorname{dom} T, \ \forall c \in \mathbb{R}$

$T(0) = 0$

toutes transfo $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est matricielle

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ alors $\exists$ unique matrice t.q.

$T(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

TABLE 1 Reflections

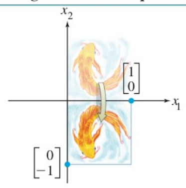
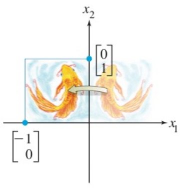
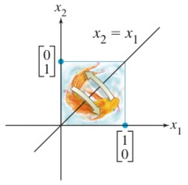
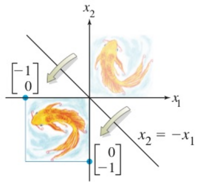
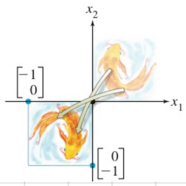
Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Reflection through the x_1-axis		$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$
Reflection through the x_2-axis		$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
Reflection through the line $x_2 = x_1$		$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$
Reflection through the line $x_2 = -x_1$		$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$
Reflection through the origin		$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

TABLE 2 Contractions and Expansions

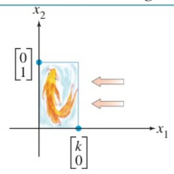
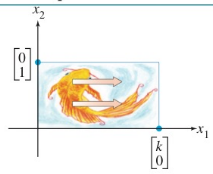
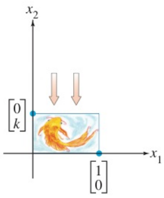
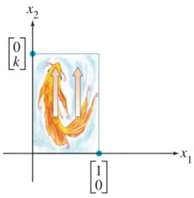
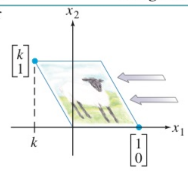
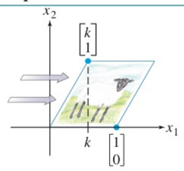
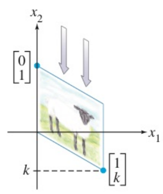
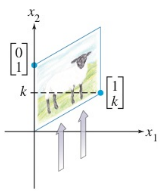
Transformation	Image of the Unit Square		Standard Matrix
Horizontal contraction and expansion	 $0 < k < 1$	 $k > 1$	$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
Vertical contraction and expansion	 $0 < k < 1$	 $k > 1$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$

TABLE 3 Shears

Transformation	Image of the Unit Square		Standard Matrix
Horizontal shear	 $k < 0$	 $k > 0$	$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$
Vertical shear	 $k < 0$	 $k > 0$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$

Surjectif si $\forall b \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'au <u>moins</u> 1 $x \in \mathbb{R}^n$.

- colonne de A span $\mathbb{R}^m$
- solution = 1, ∞

injectif si $\forall b \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'au <u>plus</u> 1 $x \in \mathbb{R}^n$

- $T(x) = 0$ que solution trivial
- colonne de A sont linéairement indépendante
- Solution = 0, 1

Chap II

. entrée matrice = a_{ij} i rangée j colonne

. entrée diagonal : $i = j$

. matrice diagonal = carré $(n \times n)$ et toutes entrée où $i \neq j = 0$

. Somme matrice $n \times m$ a $i \times j$ si $n \neq i$ & $m \neq j$

$\Rightarrow$ × défini

$\rightarrow$ Si A, B, C matrices de la mê taille et s, r scalaire.

1. $A + B = B + A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $A + 0 = A$
4. $r(A+B) = rA + rB$
5. $(r+s)A = rA + sA$
6. $r(sA) = s(rA)$

multiplicat° : $m \times \underline{n}$ & $\underline{n} \times p$

si ≠ × défini

$\Rightarrow$ rangée$_i$ (AB) = rangée$_i(A) \cdot B$

Soit A une matrice $m \times n$ et B, C deux matrice avec les dimension nécessaire pour que les équ. ci-dessous soient définies.

a. $A(BC) = (AB)C$ associativité

b. $A(B+C) = AB + AC$ distribut° gauche

c. $(B+C)A = BA + BC$ distribut° droite.

d. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ $\forall r \in \mathbb{R}$.

e. $I_n \cdot A = A = A \cdot I_m$

⚠ × commutatif

$A^k = \underbrace{A \cdot A \dots A}_{k}$ $A^0 = I_m$

$A \quad n \times m \implies A^T = m \times n$

2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\qquad$ 2×2 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Soit A & B des matrices appropriées :

a. $(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(rA)^T = r(A^T) \qquad \forall r \in \mathbb{R}$

$(AB)^T = B^T A^T$

A est inversible si $\exists$ C ($\bar{m}$ dimension) tq $AC = I$

C est unique

<u>Pour une matrice 2×2</u> $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\forall a\, b\, c\, d$ tq $ab - dc \neq 0$

alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

si det = 0 $\longrightarrow$ × inversible

Soit A $n \times n$ inversible, $\forall b \in \mathbb{R}^n$ $\quad Ax = b \implies bA^{-1} = x$

$(A^{-1})^{-1} = A$

A & B inversible $\longrightarrow$ AB inversible.

A inversible $\implies$ A^T inversible

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

matrice élémentaire : matrice I à laquelle on fait seulement 1 opération

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

· Si A inversible alors $\sim$ à I selon multiplicat° des matrices élémentaires

operat° qui transforment A en I transforme I en A^{-1}

trouver $(A^{-1}) \to$ poser $(A \; I)$

Th Soit A $n \times n$, alors les points suivants sont equivalent
(pour un A donné, tous faux ou tous vrais)

a. A est inversible

b. A est equivalent à I_n

c. A a n position pivots.

d. $Ax = 0$ n'a que la solut° trivial

e. les colonnes de A forment un set linéairement independant.

f. la transformation linéaire $x \mapsto Ax$ est injective.

g. l'equation $Ax = b$ a au moins une solut° $\forall b \in \mathbb{R}^n$

h. les colonnes de A span $\mathbb{R}^n$

i. la transformat° linéaire $x \mapsto Ax$ est surjective

j. $\exists$ une matrice C $n \times n$ tq $CA = I_n$

k $\exists$ une matrice D $n \times n$ tq $AD = I_n$

l. $(A)^T$ est inversible

m. les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$

n. $\operatorname{col} A = \mathbb{R}^n$

o. $\dim \operatorname{col} A = n$

p. rank $A = n$

q. $\operatorname{Nul} A = \{0\}$

r. $\dim \operatorname{Nul} A = 0$

voir déf + base

on peut partitionné une matrice en plusieurs sous matrices.

matrices Block diagonal = block matrices tel que hors la diagonal = matrice nulle

$\longrightarrow$ inversible si et seulement si chaque block dans la diagonale est inversible

$A \cdot A^{-1} = I$ $\longrightarrow$ on partitionne les 3 de la ... matrice et c'est ok

Factorisation : $A \Rightarrow B \cdot C$

factorisation LU : $A \Rightarrow LU$ $\quad A_{m \times n} \quad L_{m \times m} \quad U_{m \times n}$

L = matrice triangulaire inferieure unité $\Rightarrow$ inversible.

$U = EF(A)$

Algo : 1. réduire A (si possible)

2. placer les entrées de L selon la in séquence d'opérat°

(voir notes pr ex.)

---

coordonnées homogène : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$

transformat° $\longrightarrow$ matrice avec vecteur $\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{1}$.

objet 3D $\longrightarrow$ 2D : $x\,y\,z \Rightarrow x\,y$

oeil : centre de project° $= (0\ 0\ d)$

project° $(x\ y\ z) \Rightarrow (x' ; y', 0)$

toutes les droites se croisent en 1 pt. $(0\ 0\ d)$

voir note + livre si besoin

déf : un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est tout ensemble $H \in \mathbb{R}^n$ qui ont les trois propriétés :

1. $\vec{0} \in H$

2. $\forall u, v \in H, (u+v) \in H$

3 $\forall u \in H$ et $\forall c \in \mathbb{R}$, $cu \in H$

espace colonne : $Ax = b$ $\Rightarrow$ ensemble de tous les b pour lesquels l'équation a une solution
$Col(A)$

espace nulle : $Ax = 0$ $\Rightarrow$ tt les solutions
$Nul(A)$

A $m \times n$ $\Rightarrow$ $Nul(A)$ = sous espace de $\mathbb{R}^n$

base d'un sous ensemble = ensemble linéairement indépendant dans H qui Span $\{H\}$

base de $col(A)$ = colonne pivots de A.

- soit l'ensemble $B = \{b_1 \dots b_2\}$ une base d'un sous espace H. $\forall x \in H$ les coordonnées de x relatives à la base B sont les poids $c_1 \dots c_2$ t.q. $x = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p$ et le vecteur $\in \mathbb{R}^p$: $[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$

la base crée un nv repère qu'on dit isomorphisme de $\mathbb{R}^n$

dimension, $\dim H \neq 0$ = nb de vecteurs dans la base

$\dim 0 = 0$

$\text{rang}(A) = \dim(\text{col}(A))$

$= \text{nb de colonne pivot.}$

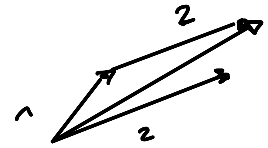
$\longrightarrow \quad \text{rang}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$

$A \; n \times m$

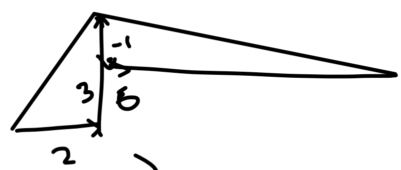
Soit H = p- dimensionnel $\Leftrightarrow$ chaque ensemble linéairement indépendant avec exactement p éléments = base pour H.

Vecteurs accroché à l'origine
associé avec des nb et 1 seul

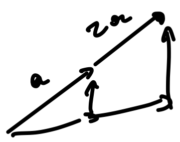
addition origine devient la fin du premier
→ origine fin du deuxième
résultat



$2 \to 3\hat{\imath}$ $-1\hat{\jmath}$ $6 \to$

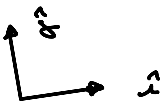


mult scalaire



Combinaison linéaire vectorielle et vecteurs de base

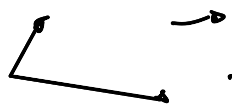
Vecteurs de base



$\hat{\jmath}$ $\hat{\imath}$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$

→ Si on choisi d'autres vecteurs



→ si on des coordonnée pourrait répondre à chaque $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$

Combinaison linéaire : scaling + addition $a\vec{v} + b\vec{w}$

↳ ex si on fixe 1 et qu'on change l'autre (b)
→ ligne droite

Si on peut changer les 2 → on peut faire chaque pt.
→ juste une ligne à travers l'origine

Span : tt les combinaison linéaire

↳ $\vec{0}$ et $\vec{0}$ = 1 pt.

⚠ matrix ⇒ interprétation en transformation de l'espace.

Inhoduct

équation et Matrices

2 système équivalent = m̄ ensemble solut°

rangée équivalente <=> m̄ ensemble solut°

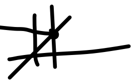
opérat° élémentaires : multiplicat° scalaire ($\neq 0$)
Interchangeage ligne
remplacement (elle m̄ + x · autres)

inconsistent = 0 solut°

consistent = $<^{\infty}_{1}$ sol (= intersect° des équat°)

chaque matrice = 1 EF + 1 REF associé

Solut°



$\sim$ {
- $\forall b \in \mathbb{R}^m$ $Ax = b$ a une solut°
- chaque $b \in \mathbb{R}^m$ est une combinaison linéaire de A
- colonne de A span $\mathbb{R}^m$
- A a une posit° pivot dans chaque rangée

• REF augmenté solut° : 0 : rangé type 000a
∞ : variable libre
1 : aucun des 2.

$$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$
$$A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$$

combinaison

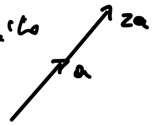
$\vec{u} + \vec{v}$ = grand axe parallélogramme

combinaison linéaire : $x_1 v_1 + \dots = \vec{b}$

$Ax = b$ = $a_1x_1 + a_2x_2 \dots a_nx_n = [a_1\ a_2 \dots a_n | b]$

↳ a une solut° iff b combinaison linéaire des colonnes de A et variable = paramètre

span : ensemble de toutes les combinaison linéaire



homogène

$$\begin{bmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & x & 0 \\ x & x & x & 0 \end{bmatrix}$$

homogène $Ax = 0$

solut° trivial $\vec{x} = \vec{0}$

a une solut° non-trivial iff il y a variable libre.

[$Ax = b$ consistent pour un b donné
p une solut°
l'ensemble des solut° : $w = p + v_h$
v_h = solut° de l'équat° $Ax = 0$

forme paramétrique $\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}$ $s,t \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ = variable libre en paramètre

indépendance linéaire

linéairement indépendant : Set $\{v_1 \dots v_n\}$

$x_1 v_1 + \dots x_2 v_2 = 0$, $Ax = 0$

=> que sol trivial $[v_1\ v_2\ v_n | 0]$

- Ensemble vecteurs :

si + de vecteurs que de dimension → dépendant

si contient $\vec{0}$

transformat° linéaire

associé à une matrice A

$$\boxed{x} \xrightarrow{A} \boxed{b}$$

$T(x) = Ax$ et $Ax \in \mathbb{R}^m$
$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

linéaire si : $T(u+v) = Tu + Tv$
$T(cu) = c(Tu)$

chaque T associé une matrice

injectif

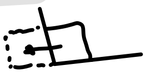
- $T(x) = 0$ que sol trivial
- colonnes A linéairement indépendante
- 0 sol ou 1

surjectif

- colonne A span ensemble arrivé
- 1 sol ou ∞

si matrice transformat° a des colonnes linéairement dépendante → supprime une dimension ($L \Rightarrow \not{}$)

réflexion : x_1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



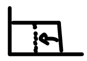
x_2 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

droite $x_2 = x_1$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = -x_1$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

origine $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

T majorat° : contract° horizontale $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$

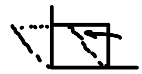


expansion $k > 1$

contract° verticale $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$

expansion $k > 1$

cisaille horizontal gauche $k < 0$, droite $k > 0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



verticale bas $k < 0$, haut $k > 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

rotat° θ $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

a_{ij} (rangée, colonne)

$A + B = [\vec{a_1}] + [\vec{b_1}] \dots [\vec{a_n}] + [\vec{b_n}]$

$3A$

matrices égales (même taille)

$(A_{ij})^T = A_{ji}$

$(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$

Transformation linéaire inverse

$T^{-1}(T(x)) = x$

↳ iff la matrice associée est inversible

Factorisation LU

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "U"'] & & b \\ & y \arrow[ur, "L"'] & \end{tikzcd}$$

si A peut être EF sans interchangeage de rangée

$$A = \begin{bmatrix}1&0&0\\ *&1&0\\ *&*&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\blacksquare&*&*&*\\ 0&0&\blacksquare&*\\ 0&0&0&\blacksquare\end{bmatrix}$$

$E_p \dots E_1 A = U$

$\Rightarrow L = (E_p \dots E_1)^{-1}$

$A = LU$

$$A = \begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\-4&-5&3&-8&1\\2&-5&-4&1&8\\-6&0&7&-3&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\0&3&1&2&-3\\0&-9&-3&-4&10\\0&12&4&12&-5\end{bmatrix} = A_1$$

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\0&3&1&2&-3\\0&0&0&2&1\\0&0&0&4&7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}2&4&-1&5&-2\\0&3&1&2&-3\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&5\end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix}2\\-4\\2\\-6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\\-9\\12\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

$\div 2 \quad \div 3 \quad \div 2 \quad \div 5$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-2&1&&\\1&-3&1&\\-3&4&2&1\end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad L = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-3&1&0\\-3&4&2&1\end{bmatrix}$$

multiplication

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "B"] \arrow[rr, bend right, "AB"'] & Bx \arrow[r, bend left, "A"] & ABx \end{tikzcd}$$

déf si $x \times n$ et $n \times y$

$\Rightarrow x \times y$

$AB = [Ab_1 \;\; Ab_2 \dots]$

combinaison linéaire des colonnes de A avec celles de B en poids

$AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$A^k = A \cdot A \cdots$

$A^0 = I$

Matrices

inverse

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Pour 2×2 $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

si $ad - bc = 0$

→ non inversible.

$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A & B inversible
   $\Rightarrow AB$ aussi
   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. A inversible $\Rightarrow A^T$ aussi
   $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Matrices élémentaires

. obtenue en faisant 1 opération

. élémentaire rangée.

• on fait une opération élémentaire sur A $m \times n$
$= EA$ → E $n \times n$ $= I$ avec la même opération

. E^{-1} ∃ et = à l'opération inverse

A inversible iff $\sim$ à I

$\Rightarrow$ la suite de E qui transforment A en I transforment I en A^{-1}

trouver A^{-1} : $[A \;\; I] \sim [I \;\; A^{-1}]$

Dimension of rang

→ vecteur coordinée :

$x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$

$[x]_B = \begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$

→ Dimension dans la = nb de vecteurs base (dim H)

→ rang : dim col A (rank A)

A $n \times m$: rank A + dim Nul A $= n$

dim H = p ∈ $\mathbb{R}^n$ tout ensemble linéairement indépendant avec exactement p éléments → Base H

→ matrice peut ê partitionée

$$\begin{bmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1B_1 + A_2B_2\\A_3B_1 + A_4B_2\end{bmatrix}$$

Thm matrice inversible

A : $n \times n$

1. A est inversible
2. A rangée $\sim$ à I
3. A n pos pivot
4. $Ax = 0$ → que sol. triviale
5. colonnes de A linéairement indépendante
6. $x \to Ax$ bijectif
7. $Ax = b$ consistent
8. colonnes A span $\mathbb{R}^n$
9. A^T inversible
10. colonnes de A : base de $\mathbb{R}^n$
11. Col A $= \mathbb{R}^n$
12. rank $= n$
13. Nul A $= \{\vec{0}\}$
14. dim Nul A $= 0$

Sous espace de $\mathbb{R}^n$

$H \in \mathbb{R}^n$ prop :

$\vec{0} \in H$

$\forall u, v \in H \Rightarrow u + v \in H$

$\forall u \in H$ et $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in H$

Espace colonne Col A :

combinaison linéaire des colonnes de A

↳ sous espace de $\mathbb{R}^m$ (pour A $m \times n$)

Espace Nul : Nul A :

ensemble des solutions $Ax = 0$

↳ sous espace de $\mathbb{R}^n$ (pour A $m \times n$)

m équations à n inconnues

base d'un sous espace

ensemble linéairement indépendant ∈ H qui span H

• les colonnes pivot de A = base pour Col A.

Déterminant

def

A_{ij} = A sans la rangée i et la colonne j

$$\det A \triangleq \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

si A triangulaire : det A = produits des entrée de la diag principale

effet

A $n \times n$

- remplacement (elle m + x. autres) $\det A' = \det A$
- scaling : $\det A' = k \cdot \det A$
- Interchangeage (1x) : $\det A' = -\det A$.
- $\det A^T = \det A$

$\det AB = \det A \cdot \det B$

calcul

- si $A \to A(E f) = U$ sans scaling avec r Interchangeage

  $\det A = (-1)^r \cdot$(produit colonne pivot) iff inversible (entrée diagonal des pivots)

- matrice carré : inversible $\iff \det A \neq 0$

surface

A 2x2 ou 3x3

Aire / volume formé par les colonnes de $A = \det A$

A matrice transformation T

S parallélogramme

(2D) Aire $T(S) = \det A \cdot$ Aire S

(3D) volume $T(S) = \det A \cdot$ volume S

(∆ S à une volume(aire fini)

cramer's rule

$A_i(b) = [a_1 \dots b \dots a_n]$ la col i remplacer

$(-1)^{i+j} \det A_{ji} = C_{ji}$

matrice $[C_{ji}] = \operatorname{adj} A$

A inversible $n \times n$ $\forall b \in \mathbb{R}^n$ la solution unique x de $Ax = b$ à les entrées :

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A} \quad i = 1, 2 \dots n$$

A inversible $n \times n$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Espace vectoriel

def

non vide
contient vecteurs

espace V, $u, v, w \in V$ et $c, d \in \mathbb{R}$

axiomes :

1. $u + v = v + u \in V$
2. $(u+v)+w = u+(v+w)$
3. $\exists \vec{0}$ t.q. $\vec{0}+\vec{v} = \vec{v}$
4. $\forall u$, $\exists -u$ t.q. $u-u=0$
5. $cu \in V$
6. $(c+d)u = cu + du$
7. $c(u+v) = cu + cv$
8. $c(du) = (cd)u$
9. $1u = u$

Sous espace

Sous espace H de V ssi :

1. $\vec{0} \in H$
2. $u+v \in H$ $\forall u, v \in H$
3. $cu \in H$ $\forall u \in H$ $\forall c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{si } v_1 \dots v_p \in V \Rightarrow \text{Span}\{v_1 \cdots v_p\} \text{ sous espace de } V}$

$\boxed{\text{les colonnes pivots de } A = \text{base pour Col } A}$

independence linéaire

un ensemble de vecteurs linéairement independ $\Rightarrow$ aucun des vecteurs = combinaison linéaire des autres

base

H sous espace de V
$B = \{b_1 \dots b_p\} \subset V$ = base pour H si :
1. B linéairement indépendant
2. span $\{b_1 \dots b_p\} = H$

$S = \{v_1 \cdots v_p\} \in V$
$H = \text{span}\{v_1 \cdots v_p\}$
$\Rightarrow$ si $\vec{v} \in S$ combinaison linéaire d'autres $\rightarrow$ il peut ê enlever et c'est tjrs span
$\Rightarrow$ si $H \neq \{0\}$, $\exists$ sous ensemble de S qui est une base pour H

$P_B = [b_1\ b_2 \dots b_n]$

$x = P_B[x]_B$

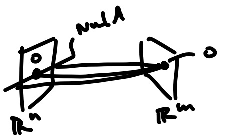
$x \mapsto [x]_B$ injectif

$B = \{b_1 \dots b_p\}$
$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p$

B une base pour V
$\Rightarrow$ si un ensemble a + de vecteurs que la base $\Rightarrow$ dependant.

Nul space

A $m \times n$
Nul A = ensemble des solut de $Ax = 0$
Nul $A = \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ et } Ax = 0\}$



espace Nul = sous espace de $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\begin{array}{l} T: V \longrightarrow W \\ \quad x \longrightarrow T(x) \\ \rightarrow T(u+v) = Tu + Tv \\ \rightarrow T(cu) = cT(u) \end{array}}$

noyau (espace Nul)

= tous les u t.q. $T(u) = 0$

étendue de T
l'ensemble de tout les vecteurs $\in W$ t.q $T(x) = w$, x donné

espace colonne

A $m \times n$,
Col A = ensemble de tt les combinaison linéaire des colonnes de A
$A = [a_1 \dots a_n]$
$\Rightarrow$ Col A = Span $\{a_1 \dots a_n\}$
Col $A = \{b : b = Ax \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n\}$

Col A est un sous ensemble de $\mathbb{R}^m$

contraste : A $m \times n$

Nul A	Col A
- sous espace $\mathbb{R}^n$	- sous espace $\mathbb{R}^m$
- def implicite (condit que $\vec{v}$ dedans doit satisfaire)	- def explicite, cmt on le construit
- $\vec{v} \in$ Nul A : $[A\ 0]$	- $\vec{v} \in$ Col A $a[a_1] + \dots$
- x de solut évidente, faut prendre A et les autres de A	- $\exists$ solut évidente
- $v \in$ Nul A : $Av = 0$	- $v \in$ Col A : $Ax = v$
- Nul $A = \{0\}$ si que sol trivial	- Col $A = \mathbb{R}^m$ iff $Ax = b$ a une sol $\forall b \in \mathbb{R}^m$
- Nul $A = \{0\}$ iff $T: x \to Ax$ injectif	- Col $A = \mathbb{R}^m$ iff $T: x \mapsto Ax$ surjectif

fini-dimentionnel : nb élément $\in$ base fini
infini-dimentionnel

$\boxed{\text{dimention Nul } A = \text{nb de variable libre de } Ax = 0}$

rank = dimension espace colonne.

rank A + dim Nul $A = n$

$B = \{b_1 \dots b_n\}$ et $C = \{c_1 \dots c_n\}$

$[x]_C = \underset{C \leftarrow B}{P} [x]_B$

$\underset{C \leftarrow B}{P} = [[b_1]_C\ [b_2]_C \dots [b_n]_C]$

$= \left(\underset{C \leftarrow B}{P}\right)^{-1} = \underset{B \leftarrow C}{P}$

$[B \mid C] \sim [I \mid \underset{C \leftarrow B}{P}]$

matrice inversible thm :

colonne de A = base pour $\mathbb{R}^n$
Col $A = \mathbb{R}^n$
rank $A = n$
Nul $A = \{0\}$
dim Nul $A = 0$