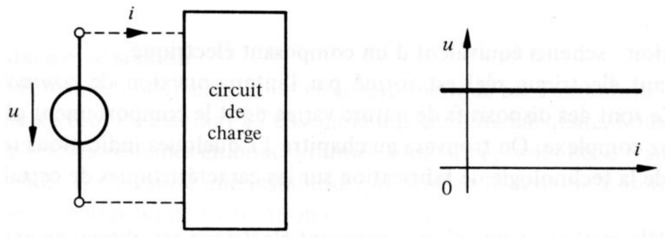
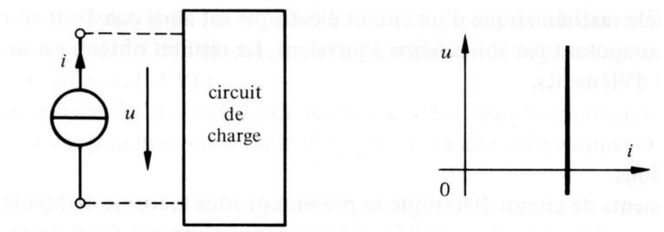
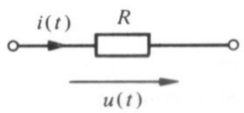
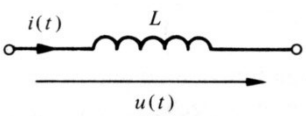
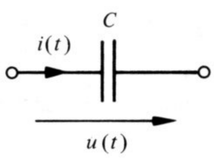
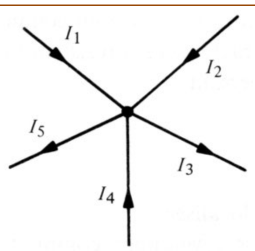
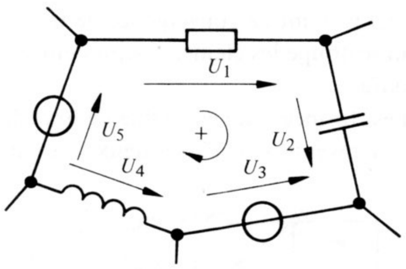
FORMULAIRE

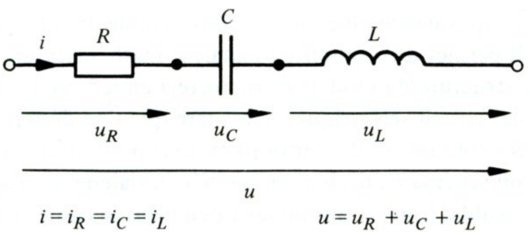
Éléments de circuits

	**Source idéale de tension** Élément de circuit capable de délivrer une tension constante et indépendante du courant débité.
	**Source idéale de courant** Élément de circuit capable de délivrer un courant constant et indépendant de la tension à ses bornes.

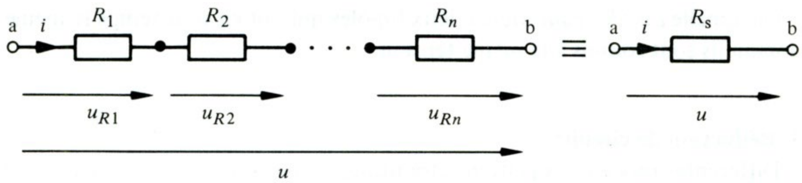
	$u(t) = Ri(t)$	**Résistance** Unité : ohm (Ω) (1 Ω = 1 V/A)
	$u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $i(t) = \dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau = i(0) + \dfrac{1}{L}\int_{0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$	**Inductance** Unité : henry (H) (1 H = 1 Vs/A)
	$i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $u(t) = \dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau = u(0) + \dfrac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$	**Capacité** Unité : farad (F) (1 F = 1 C/V = 1 As/V)

	**Loi de Kirchhoff pour les nœuds** $\sum_{j=1}^{N} I_j = 0$ $I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$
	**Loi de Kirchhoff pour les mailles** $\sum_{j=1}^{N} U_j = 0$ $U_1 + U_2 - U_3 - U_4 + U_5 = 0$

Éléments en série

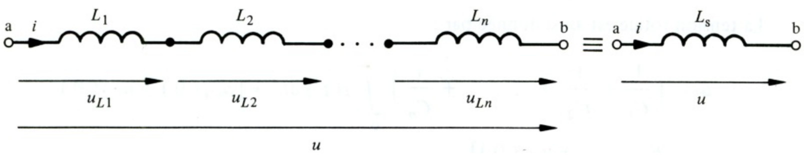


Des éléments connectés en série sont parcourus par le même courant. La tension aux bornes du circuit est égale à la somme des tensions relatives à chaque élément.



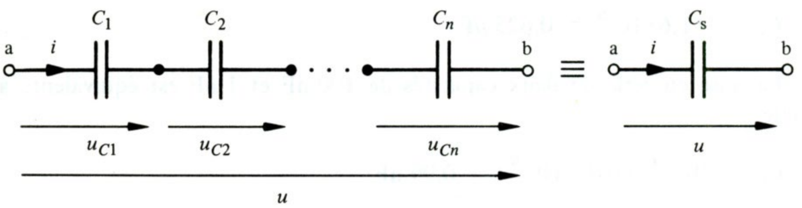
Résistance

$$R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$$



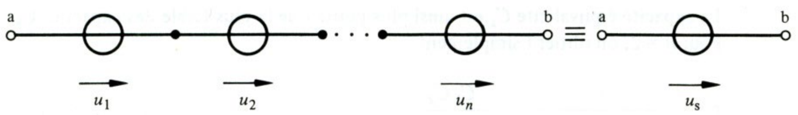
Inductance

$$L_s = \sum_{k=1}^{n} L_k \qquad i(0) = i_{Lk}(0)$$



Capacité

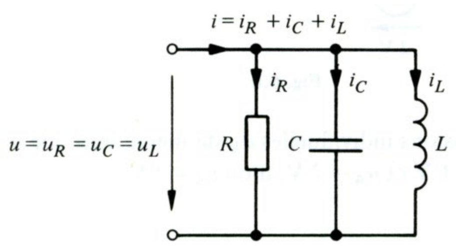
$$\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k} \qquad u(0) = \sum_{k=1}^{n} u_{Ck}(0)$$



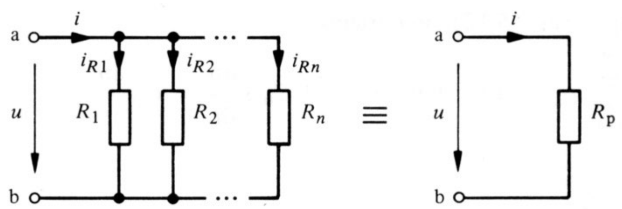
Source de tension

$$u_s = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Éléments en parallèle

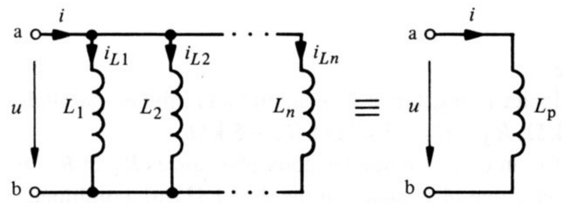


Des éléments connectés en parallèle sont soumis à la même tension. Le courant total est la somme des courants individuels



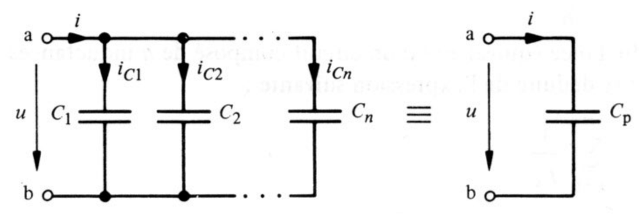
Résistance

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$



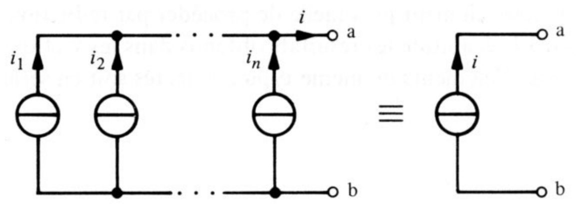
Inductance

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k} \qquad i(0) = \sum_{k=1}^{n} i_{Lk}(0)$$



Capacité

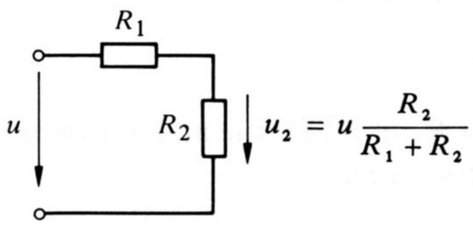
$$C_\mathrm{p} = \sum_{k=1}^{n} C_k \qquad u(0) = u_k(0)$$

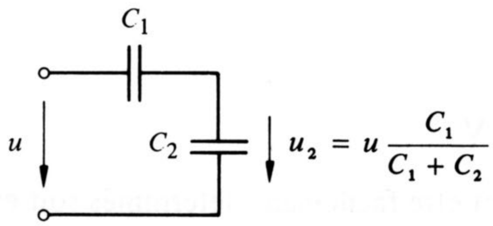


Source de courant

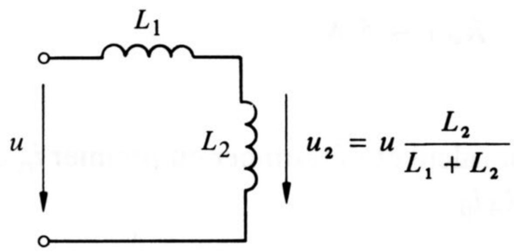
$$i = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

Diviseur de tension

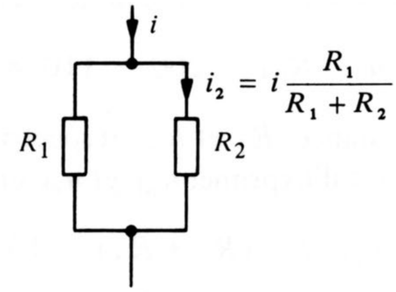


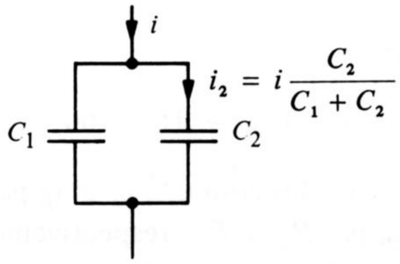


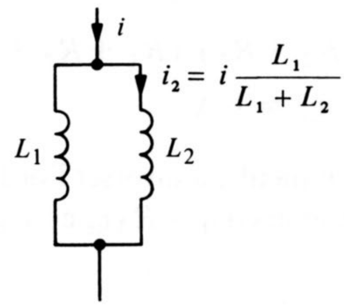
(tensions initiales nulles)



Diviseur de courant

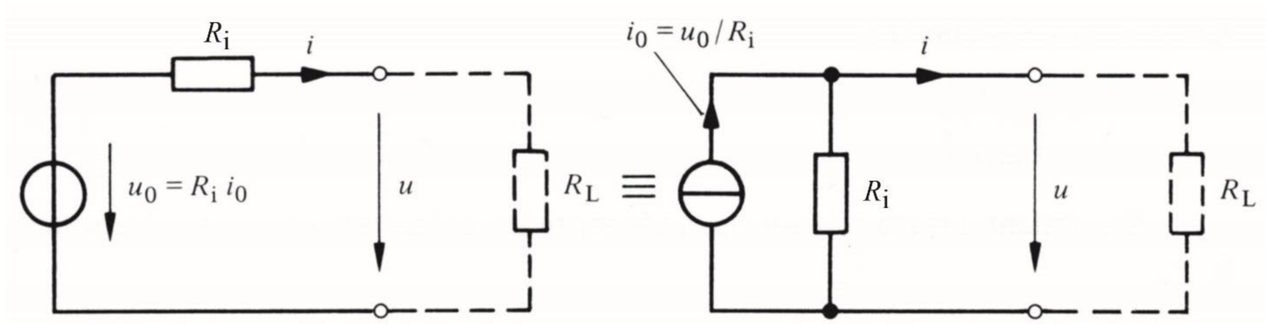




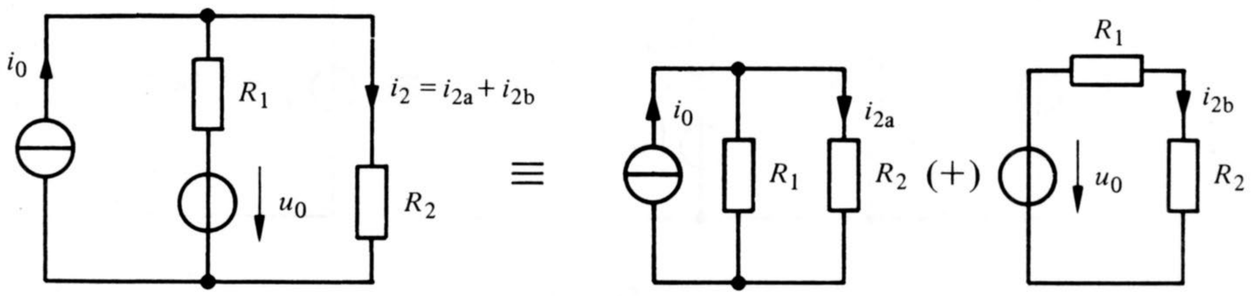


(courants initiaux nuls)

Équivalence source de tension – source de courant

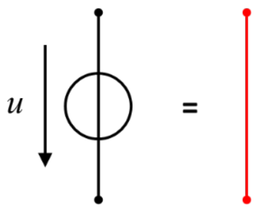
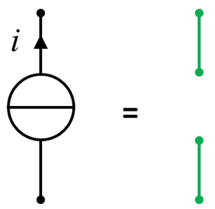


Principe de superposition



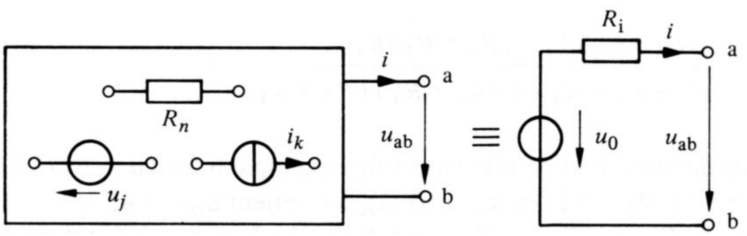
Le courant et les tensions dans un élément quelconque d'un circuit linéaire sont donnés par la somme des tensions et des courants produits dans cet élément par chaque source prise séparément.

À chaque étape, une seule source du réseau initial est prise en compte, les autres étant annulées.

	Annuler une source de tension consiste à la remplacer par un court-circuit.		Annuler une source de courant consiste à la remplacer par un circuit-ouvert.

Théorème de Thévenin

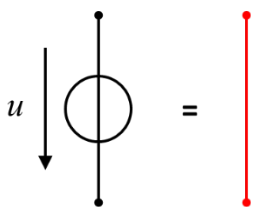
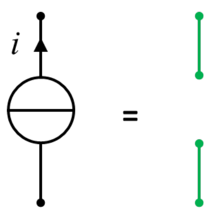
On veut remplacer un circuit complexe par un circuit composé d'une **source de tension** et une **résistance en série**.



$$u_0 = u_{ab}\big|_{i=0}$$
$$R_i = R_{ab}\big|_{u_j=0,\, i_k=0}$$

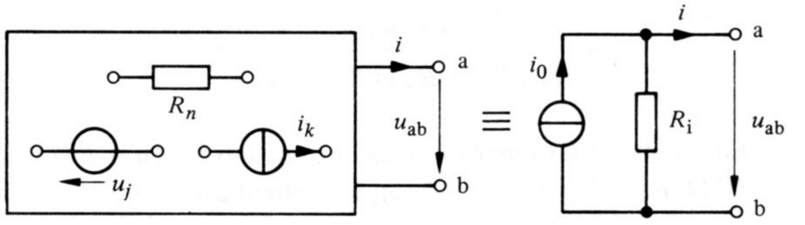
Procédure:

- Identifier les bornes du circuit et la charge externe
- Annuler les sources et déterminer la résistance vue des bornes du circuit.
  C'est la **résistance de Thévenin**
- Mesurer ou calculer la tension aux bornes du circuit sans charge extérieure.
  C'est la **tension de Thévenin**

	Annuler une source de tension consiste à la remplacer par un **court-circuit**.		Annuler une source de courant consiste à la remplacer par un **circuit-ouvert**.

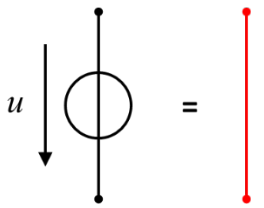
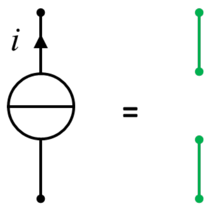
Théorème de Norton

On veut remplacer un circuit complexe par un circuit composé d'une **source de courant** et une **résistance en parallèle**.

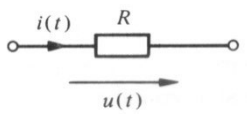
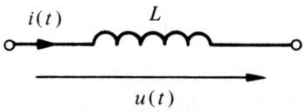
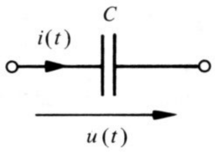
	$i_0 = i\big\|_{u_{ab}=0}$ $R_i = R_{ab}\big\|_{u_j=0,\, i_k=0}$

Procédure:

- Identifier les bornes du circuit et la charge externe
- Annuler les sources et déterminer la résistance vue des bornes du circuit.
  C'est la **résistance de Norton**
- Court-circuiter les bornes du circuit et mesurer ou calculer le courant de court-circuit.
  C'est le **courant de Norton**

	Annuler une source de tension consiste à la remplacer par un **court-circuit**.		Annuler une source de courant consiste à la remplacer par un **circuit-ouvert**.

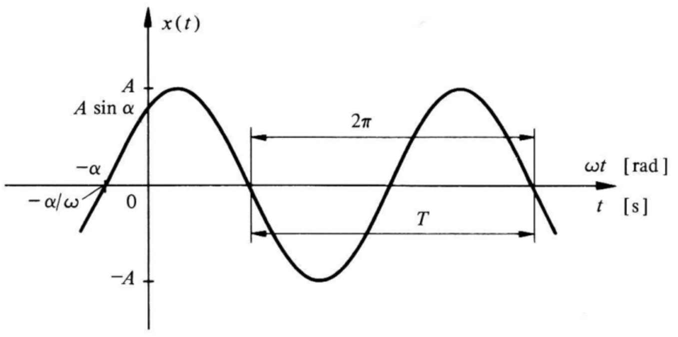
Puissance instantanée	$p(t) = u(t) \cdot i(t)$ La puissance instantanée fournie à un bipôle est le produit des valeurs de la tension à ses bornes et du courant qui le traverse.	Unité : watt (W) $(1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{VA})$
Énergie	$w(t) = \int p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ La valeur instantanée de l'énergie est obtenue en intégrant la puissance instantanée	Unité : joule (J)

	$p_R(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R}u^2(t)$	$w_R(t) = R\int_0^t i^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{R}\int_0^t u^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$
	$p_L(t) = Li(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$
	$p_C(t) = Cu(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$w_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$

FORMULAIRE

Circuits en régime sinusoïdal monophasé

Fonction sinusoïdale



$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = A\sin(\omega t + \alpha)$$

- T : Période
- $f = 1/T$: Fréquence
- A : Amplitude (Valeur de crête)
- α : Phase initiale
- $\omega = 2\pi f$: Pulsation ($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

Valeur moyenne

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \bar{X} = \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega t + \alpha)\,\mathrm{d}t = 0$$

Valeur efficace

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad X = \sqrt{\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha)\,\mathrm{d}t} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

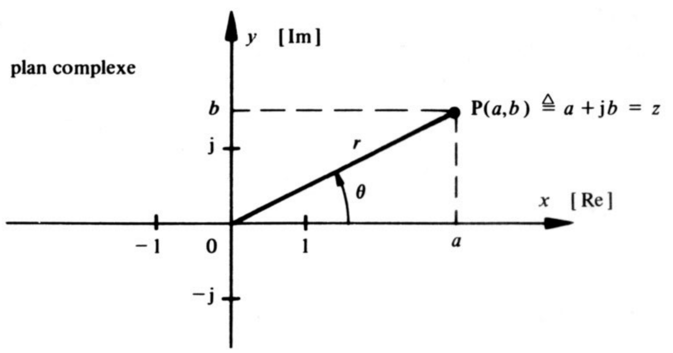
Tension et courant sinusoïdaux

$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \beta) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta)$$

$$\varphi = \alpha - \beta$$

est le déphasage entre les phases de la tension et du courant

Nombre complexe



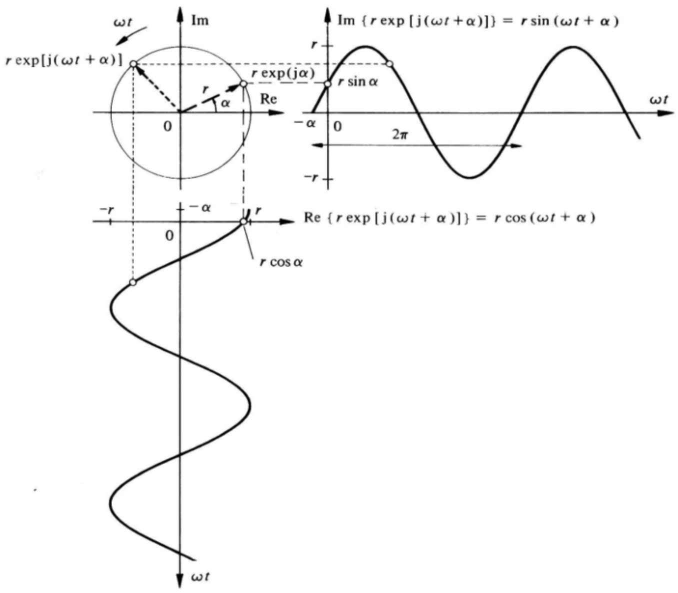
$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b = r\cos\theta + \mathrm{j}r\sin\theta = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

Avec :

$$r = |\underline{z}| = |a + \mathrm{j}b| = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathrm{OP}$$

$$\theta = \arg(\underline{z}) = \arctan\frac{b}{a}$$

Fonction exponentielle complexe



$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b = r\cos\theta + \mathrm{j}r\sin\theta = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

Si :

$$\theta = \omega t + \alpha$$

On obtient :

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)} = r\left[\cos(\omega t + \alpha) + \mathrm{j}\sin(\omega t + \alpha)\right]$$

$$\mathrm{Re}\left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)}\right\} = r\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\mathrm{Im}\left\{r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)}\right\} = r\sin(\omega t + \alpha)$$

Valeurs instantanées complexes

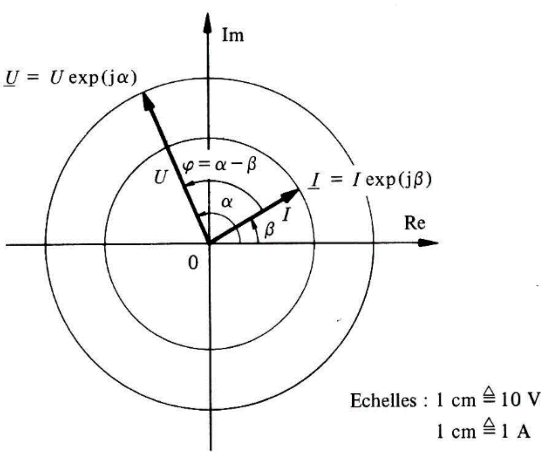
$$\underline{u} = \hat{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)} = \sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)}$$

$$\underline{i} = \hat{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta)} = \sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta)}$$

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)}\right\}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta)}\right\}$$

Phaseur



$$\underline{u} = \sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)} = \sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t)}$$

$$\underline{i} = \sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta)} = \sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t)}$$

Définition du phaseur

$$\underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha)}$$

$$\underline{I} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta)}$$

Relations entre tension, courant et phaseur

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \beta) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

Opérations sur les Phaseurs

Soit les deux phaseurs :

$$\underline{U}_1 = U_1 e^{j\alpha_1} \quad ; \quad \underline{U}_2 = U_2 e^{j\alpha_2}$$

Multiplication

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_1 \cdot \underline{U}_2 = U_1 e^{j\alpha_1} U_2 e^{j\alpha_2} = U_3 e^{j\alpha_3} \qquad U_3 = U_1 U_2 \qquad \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

Division

$$\underline{U}_3 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1 e^{j\alpha_1}}{U_2 e^{j\alpha_2}} = U_3 e^{j\alpha_3} \qquad U_3 = \frac{U_1}{U_2} \qquad \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$$

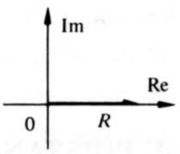
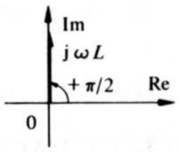
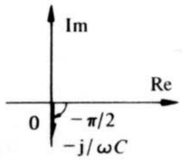
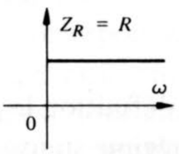
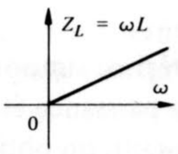
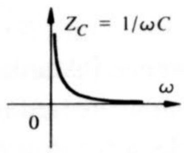
Dérivation du phaseur $\underline{X} = X e^{j\alpha}$

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = j\omega \underline{X}$$

Intégration du phaseur $\underline{X} = X e^{j\alpha}$

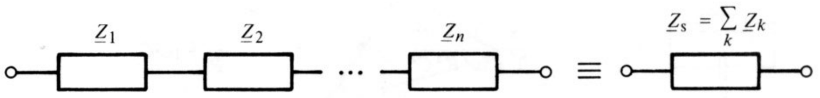
$$\int \underline{X}\, dt = \frac{1}{j\omega} \underline{X}$$

Impédance complexe $\underline{Z}$	Admittance complexe $\underline{Y}$
$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}}$
$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = Z e^{j\varphi} =$ $= Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + jX$ Avec : $Z = \frac{U}{I} \qquad \varphi = \alpha - \beta$	$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\beta}}{U e^{j\alpha}} = Y e^{-j\varphi} =$ $= Y(\cos\varphi - j\sin\varphi) = G + jB$ Avec : $Y = \frac{I}{U} \qquad \varphi = \alpha - \beta$
Résistance $R = \mathrm{Re}(\underline{Z}) = \frac{U}{I}\cos\varphi = Z\cos\varphi$ Réactance $X = \mathrm{Im}(\underline{Z}) = \frac{U}{I}\sin\varphi = Z\sin\varphi$ Avec : $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ $\varphi = \arctan\frac{X}{R}$	Conductance $G = \mathrm{Re}(\underline{Y}) = \frac{I}{U}\cos\varphi = Y\cos\varphi$ Susceptance $B = \mathrm{Im}(\underline{Y}) = -\frac{I}{U}\sin\varphi = -Y\sin\varphi$ Avec : $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ $-\varphi = \arctan\frac{B}{G} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{B}{G}\right)$

Elément	Résistance $R\,[\Omega]$	Inductance $L\,[\mathrm{H}]$	Capacité $C\,[\mathrm{F}]$
Relations en valeurs instantanées	$u = Ri$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$u = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i\,\mathrm{d}t$
	$i = \dfrac{1}{R}u$	$i = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} u\,\mathrm{d}t$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Relations en valeurs complexes (régime sinusoïdal)	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{U} = \mathrm{j}\omega L\underline{I}$	$\underline{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\underline{I}$
	$\underline{I} = \dfrac{1}{R}\,\underline{U}$	$\underline{I} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}\,\underline{U}$	$\underline{I} = \mathrm{j}\omega C\underline{U}$
Impédance	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L$	$\underline{Z}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$
Module $[\Omega]$	$Z_R = R$	$Z_L = \omega L$	$Z_C = \dfrac{1}{\omega C}$
Déphasage [rad]	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = +\dfrac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\dfrac{\pi}{2}$
Admittance	$\underline{Y}_R = \dfrac{1}{R} = G$	$\underline{Y}_L = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}$	$\underline{Y}_C = \mathrm{j}\omega C$
Module [S]	$Y_R = \dfrac{1}{R}$	$Y_L = \dfrac{1}{\omega L}$	$Y_C = \omega C$
Déphasage [rad]	$-\varphi_R = 0$	$-\varphi_L = -\dfrac{\pi}{2}$	$-\varphi_C = +\dfrac{\pi}{2}$
Résistance $[\Omega]$	$R_R = R$	$R_L = 0$	$R_C = 0$
Réactance $[\Omega]$	$X_R = 0$	$X_L = \omega L$	$X_C = \dfrac{-1}{\omega C}$
Conductance [S]	$G_R = \dfrac{1}{R}$	$G_L = 0$	$G_C = 0$
Susceptance [S]	$B_R = 0$	$B_L = \dfrac{-1}{\omega L}$	$B_C = \omega C$
Diagramme complexe de l'impédance			
Dépendance de la fréquence			

Lois de Kirchhoff pour les nœuds	Lois de Kirchhoff pour les mailles
$\sum_k \underline{I}_k = 0$	$\sum_l \underline{U}_l = 0$

Impédances (admittances) en série



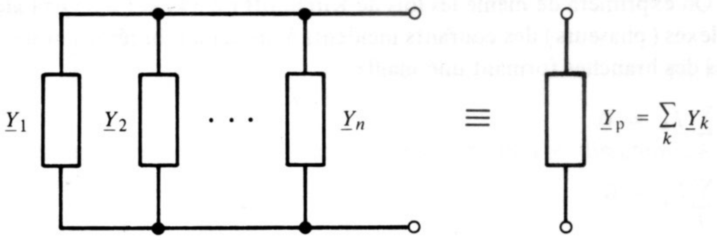
Impédance

$$\underline{Z}_s = \sum_k \underline{Z}_k$$

Admittance

$$\underline{Y}_s = \frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{\sum_k \underline{Z}_k} = \frac{1}{\sum_k 1/\underline{Y}_k}$$

Impédances (admittances) en parallèle



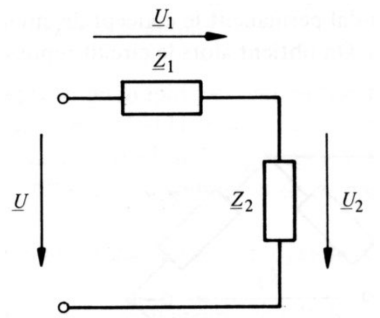
Admittance

$$\underline{Y}_p = \sum_k \underline{Y}_k$$

Impédance

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} = \frac{1}{\sum_k \underline{Y}_k} = \frac{1}{\sum_k 1/\underline{Z}_k}$$

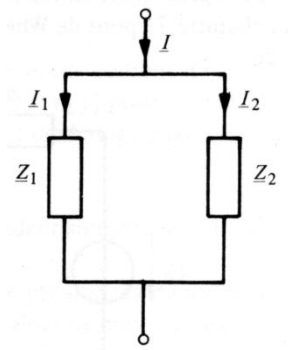
Diviseur de tension



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$$

Diviseur de courant

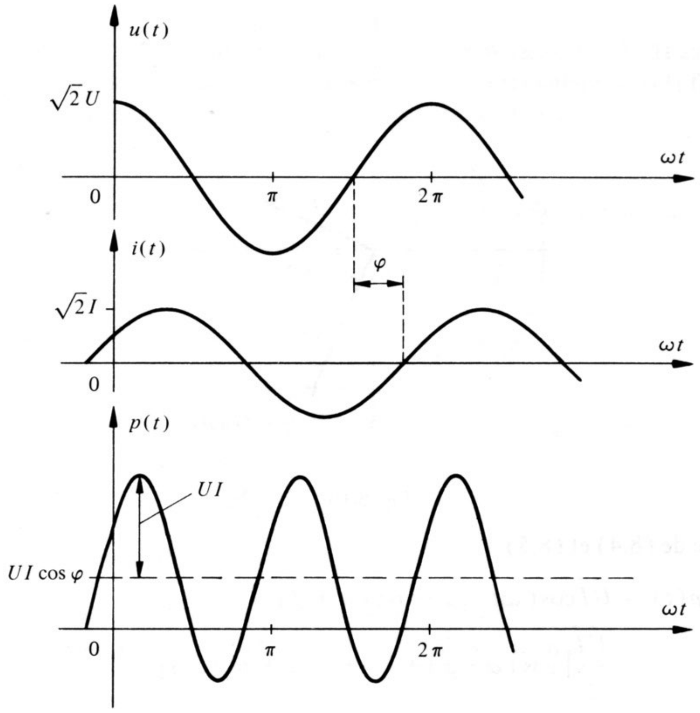


$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$$

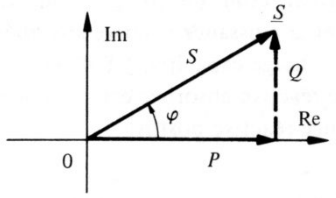
Équivalences

$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$	$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B$
$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$ $\quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$	$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ $\quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$

<table>
<tr><th colspan="2">Puissance instantanée</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$u(t)=\sqrt{2}\,U\cos(\omega t+\alpha)$</td></tr>
<tr><td>$i(t)=\sqrt{2}\,I\cos(\omega t+\beta)$</td></tr>
<tr><td>$p(t)=u(t)i(t)=$
$=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\alpha+\beta)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$p(t)=UI\cos\varphi\left[1+\cos\left(2\omega t+2\alpha\right)\right]+UI\sin\varphi\sin\left(2\omega t+2\alpha\right)$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Puissances</th></tr>
<tr><td>Puissance active</td><td>$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t=UI\cos\varphi \qquad \mathrm{W}$
La puissance active P est la valeur moyenne de la puissance instantanée.
La puissance active correspond à une fourniture réelle d'énergie convertible en travail ou en chaleur.</td></tr>
<tr><td>Puissance réactive</td><td>$Q=UI\sin\varphi \qquad \mathrm{var}$
La puissance réactive Q est l'amplitude de la composante alternative de la puissance instantanée.
La puissance réactive est une puissance qui permet de caractériser l'échange d'énergie non convertible</td></tr>
<tr><td>Puissance apparente</td><td>$S=UI \qquad \mathrm{VA}$
$S=\sqrt{P^2+Q^2}$
L'amplitude de la fluctuation de la puissance par rapport à sa valeur moyenne est appelée puissance apparente S</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$p(t)=P\left[1+\cos\left(2\omega t+2\alpha\right)\right]+Q\sin\left(2\omega t+2\alpha\right)$$</td></tr>
</table>

Puissance complexe



$$\underline{S} = P + \mathrm{j}Q = S\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Elle est aussi exprimée par

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta} = UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Avec :

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X \quad \text{et} \quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

On obtient

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{Z}\,\underline{I}\,\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 = RI^2 + \mathrm{j}XI^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P = RI^2 \\ Q = XI^2 \end{cases}$$

Avec :

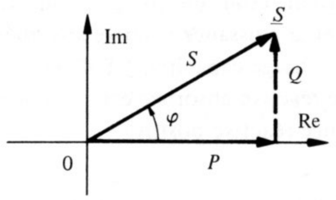
$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B \quad \text{et} \quad \underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}$$

On obtient

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{U}\,\underline{Y}^*\underline{U}^* = U^2\underline{Y}^* = GU^2 - \mathrm{j}BU^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P = GU^2 \\ Q = -BU^2 \end{cases}$$

Facteur de puissance

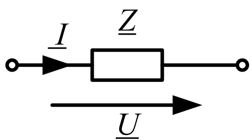


$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Le facteur de puissance est toujours positif et compris entre 0 et 1

Résistance	$\cos\varphi = 1$
Inductance	$\cos\varphi = 0$
Capacité	$\cos\varphi = 0$

Impédance



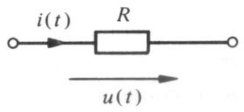
$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X \qquad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \qquad \varphi = \arctan\frac{X}{R}$$

$$P = UI\cos\varphi = RI^2 = GU^2$$

$$Q = UI\sin\varphi = XI^2 = -BU^2$$

$$p(t) = P\left[1 + \cos\left(2\omega t + 2\alpha\right)\right] + Q\sin\left(2\omega t + 2\alpha\right)$$

Résistance



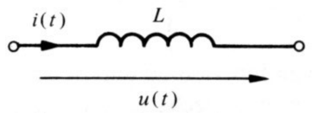
$$\underline{U} = R\underline{I} \qquad \varphi_R = 0 \qquad \underline{Z}_R = R$$

$$P = UI = U^2 / R = RI^2$$

$$Q = 0$$

$$p(t) = P\left[1 + \cos\left(2\omega t + 2\alpha\right)\right]$$

Inductance



$$\underline{U} = j\omega L\underline{I} \qquad \varphi_L = \frac{\pi}{2} \qquad \underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}X_L \qquad X_L = \omega L$$

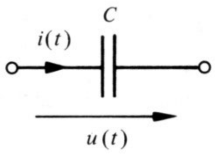
$$U = \omega LI = X_L I \qquad I = \frac{U}{X_L}$$

$$P = 0$$

$$Q = UI\sin\varphi_L = UI = \frac{U^2}{X_L} = \frac{U^2}{\omega L} = X_L I^2 = \omega LI^2 \qquad Q > 0$$

$$p(t) = Q\sin\left(2\omega t + 2\alpha\right)$$

Capacité



$$\underline{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\underline{I} \qquad \varphi_C = -\frac{\pi}{2} \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}X_C \qquad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$U = \frac{I}{\omega C} = -X_C I \qquad I = -\frac{U}{X_C}$$

$$P = 0$$

$$Q = UI\sin\varphi_C = -UI = \frac{U^2}{X_C} = -\omega CU^2 = X_C I^2 = -\frac{I^2}{\omega C} \qquad Q < 0$$

$$p(t) = Q\sin\left(2\omega t + 2\alpha\right)$$

Propriétés d'additivité

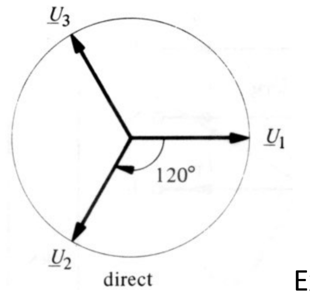
Pour tout système, les puissances actives et réactives sont séparément additives :

$$\left.\begin{aligned} P_{tot} &= \sum_j P_j \\ Q_{tot} &= \sum_j Q_j \end{aligned}\right\} \qquad S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2}$$

FORMULAIRE

Circuits en régime sinusoïdal triphasé

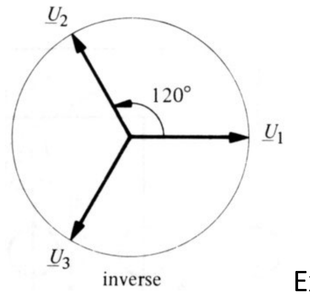
Système triphasé direct d'ordre 1



Exemple avec $\alpha = 0$

$$\underline{U}_1 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha)}$$
$$\underline{U}_2 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha - 2\pi/3)}$$
$$\underline{U}_3 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha - 4\pi/3)}$$
$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$$

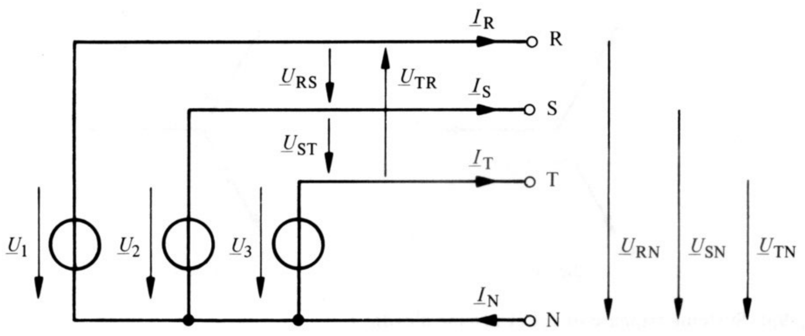
Système triphasé inverse d'ordre 1

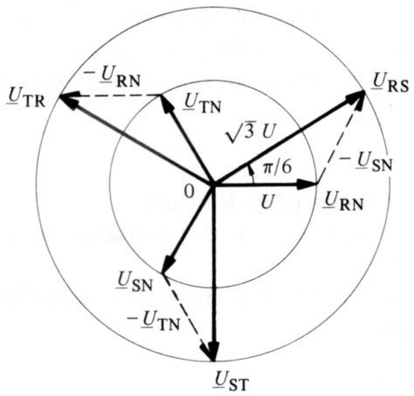


Exemple avec $\alpha = 0$

$$\underline{U}_1 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha)}$$
$$\underline{U}_2 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha + 2\pi/3)}$$
$$\underline{U}_3 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha + 4\pi/3)}$$
$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$$

Source de tension triphasée





Exemple avec $\alpha = 0$

Tension simples

$$\underline{U}_{RN} = \underline{U}_1 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha)}$$
$$\underline{U}_{SN} = \underline{U}_2 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha - 2\pi/3)}$$
$$\underline{U}_{TN} = \underline{U}_3 = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha - 4\pi/3)}$$

Tensions de ligne

$$\underline{U}_{RS} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{RN}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$$
$$\underline{U}_{ST} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{SN}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$$
$$\underline{U}_{TR} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{TN}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$$

Courants de ligne

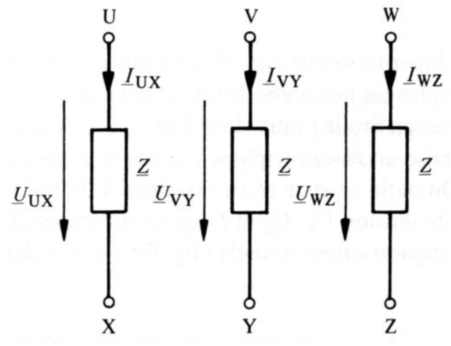
$$\underline{I}_R, \underline{I}_S, \underline{I}_T$$

Courants dans le neutre

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T$$

Les tensions de ligne forment un système triphasé symétrique en avance de $\pi/6$ par rapport aux tensions simples. Le module des tensions de ligne vaut $U_\ell = \sqrt{3}\,U$

Charge triphasée équilibrée



Trois impédances identiques

$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$

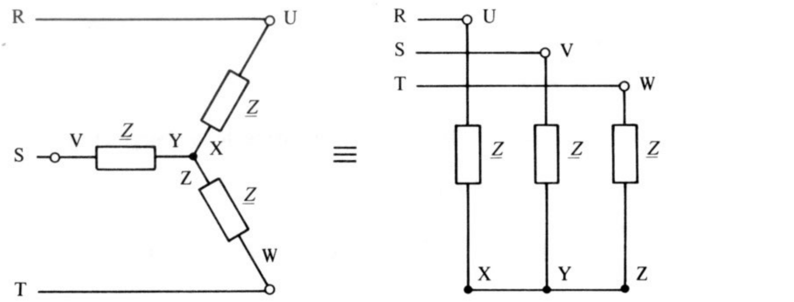
Tensions de phase

$\underline{U}_{UX}, \underline{U}_{VY}, \underline{U}_{WZ}$ de module identique U_{ph}

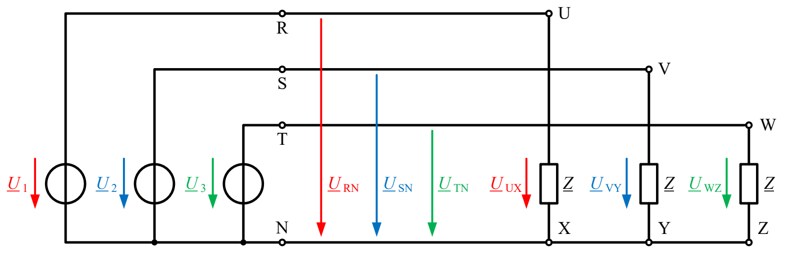
Courants de phase

$\underline{I}_{UX}, \underline{I}_{VY}, \underline{I}_{WZ}$ de module identique $I_{ph} = \dfrac{U_{ph}}{Z}$

Connexion en étoile



Montage symbolisé par le signe **Y**
Le point commun (XYZ) est appelé **point neutre de la charge.**



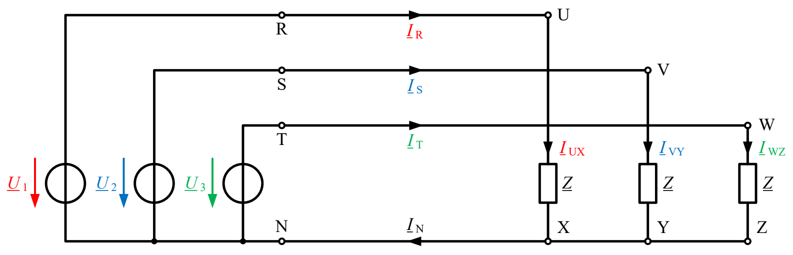
Tensions de phase

$\underline{U}_{UX} = \underline{U}_{RN} = \underline{U}_1 = Ue^{j(\alpha)}$

$\underline{U}_{VY} = \underline{U}_{SN} = \underline{U}_2 = Ue^{j(\alpha - 2\pi/3)}$

$\underline{U}_{WZ} = \underline{U}_{TN} = \underline{U}_3 = Ue^{j(\alpha - 4\pi/3)}$

Module $U_{ph} = U$



Courants de phase

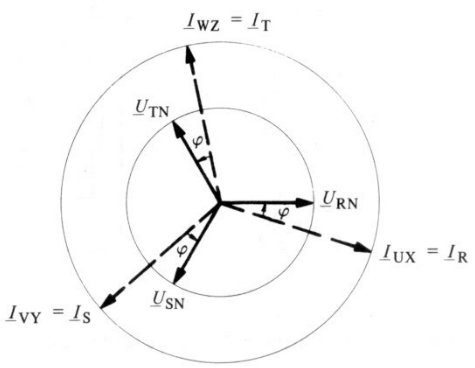
$\underline{I}_{UX} = \underline{I}_R = \dfrac{\underline{U}_{UX}}{\underline{Z}} = \dfrac{U}{Z} e^{j(\alpha - \varphi)}$

$\underline{I}_{VY} = \underline{I}_S = \dfrac{\underline{U}_{VY}}{\underline{Z}} = \dfrac{U}{Z} e^{j(\alpha - \varphi - 2\pi/3)}$

$\underline{I}_{WZ} = \underline{I}_T = \dfrac{\underline{U}_{WZ}}{\underline{Z}} = \dfrac{U}{Z} e^{j(\alpha - \varphi - 4\pi/3)}$

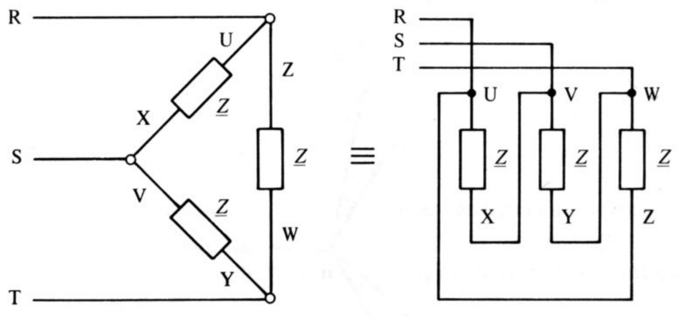
Module $I_\ell = I_{ph} = \dfrac{U_{ph}}{Z} = \dfrac{U}{Z}$

Le courant de retour entre les points neutres de la charge et de la source vaut $\underline{I}_N = \underline{I}_{UX} + \underline{I}_{VY} + \underline{I}_{WZ} = 0$

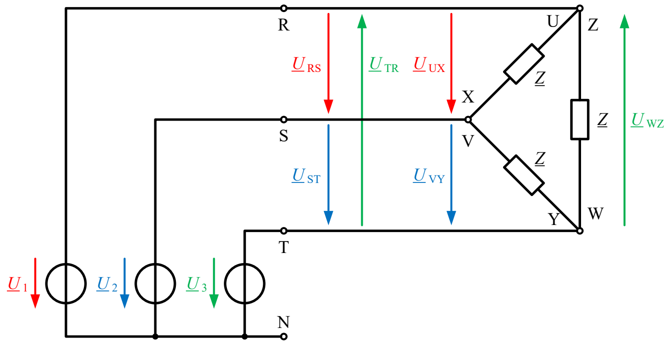


Exemple avec $\alpha = 0$

Connexion en triangle



Montage symbolisé par le signe **Δ**
Les impédances sont alimentées par les tensions de ligne et forment un circuit fermé sur lui-même.
La charge n'a pas de point neutre.



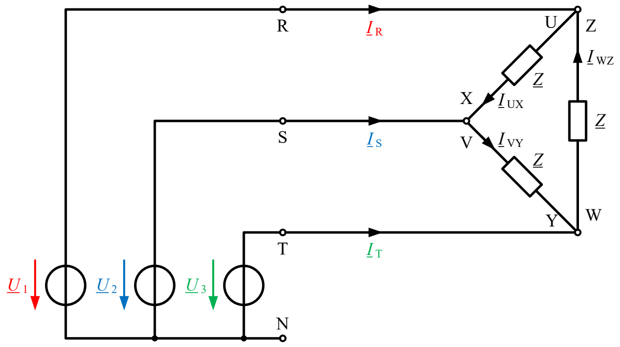
Tensions de phase

$$\underline{U}_{\mathrm{UX}} = \underline{U}_{\mathrm{RS}} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{\mathrm{RN}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6} = \sqrt{3}\,U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha+\pi/6)}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{VY}} = \underline{U}_{\mathrm{ST}} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{\mathrm{SN}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6} = \sqrt{3}\,U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\pi/2)}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{WZ}} = \underline{U}_{\mathrm{TR}} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{\mathrm{TN}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6} = \sqrt{3}\,U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-7\pi/6)}$$

Module $U_{ph} = U_{\ell} = \sqrt{3}\,U$



Courants de phase

$$\underline{I}_{\mathrm{UX}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{UX}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{RS}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{3}U}{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\varphi+\pi/6)}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{VY}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{VY}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{ST}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{3}U}{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\varphi-\pi/2)}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{WZ}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{WZ}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{TR}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{3}U}{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\varphi-7\pi/6)}$$

Les courants de phase forment un système triphasé symétrique de module $I_{\mathrm{ph}} = \sqrt{3}U\,/\,Z$

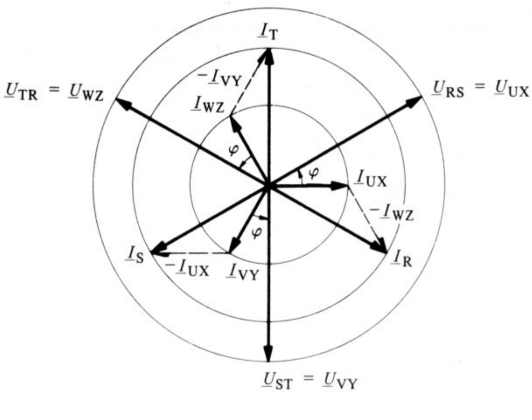
Les courants de ligne forment également un système triphasé symétrique en retard **π / 6** sur les courants de phase et de module $I_{\ell} = \sqrt{3}\,I_{\mathrm{ph}}$

Courants de ligne

$$\underline{I}_{\mathrm{R}} = \underline{I}_{\mathrm{UX}} - \underline{I}_{\mathrm{WZ}} = \sqrt{3}\,I_{\mathrm{ph}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\varphi)}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{S}} = \underline{I}_{\mathrm{VY}} - \underline{I}_{\mathrm{UX}} = \sqrt{3}\,I_{\mathrm{ph}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\varphi-2\pi/3)}$$

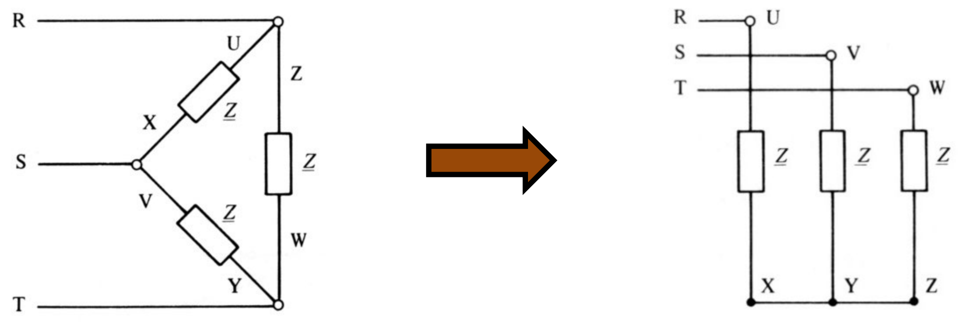
$$\underline{I}_{\mathrm{T}} = \underline{I}_{\mathrm{WZ}} - \underline{I}_{\mathrm{VY}} = \sqrt{3}\,I_{\mathrm{ph}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\varphi-4\pi/3)}$$



Exemple avec $\alpha = 0$ et $\varphi = \pi/6$

Puissance totale en régime triphasé	
La puissance totale absorbée par une charge triphasée est la somme des puissances absorbées par chaque phase.	
Puissance active totale	$P = U_{UX} I_{UX} \cos\varphi_{UX} + U_{VY} I_{VY} \cos\varphi_{VY} + U_{WZ} I_{WZ} \cos\varphi_{WZ}$ Pour un système symétrique à charge équilibrée on obtient $P = 3U_{ph} I_{ph} \cos\varphi$ $P = \sqrt{3} U_{\ell} I_{\ell} \cos\varphi$ La puissance active correspond à une fourniture réelle d'énergie convertible en travail ou en chaleur.
Puissance réactive totale	$Q = U_{UX} I_{UX} \sin\varphi_{UX} + U_{VY} I_{VY} \sin\varphi_{VY} + U_{WZ} I_{WZ} \sin\varphi_{WZ}$ Pour un système symétrique à charge équilibrée on obtient $Q = 3U_{ph} I_{ph} \sin\varphi$ $Q = \sqrt{3} U_{\ell} I_{\ell} \sin\varphi$ La puissance réactive est une puissance qui permet de caractériser l'échange d'énergie non convertible.
Puissance apparente totale	$S = 3U_{ph} I_{ph}$ $S = \sqrt{3} U_{\ell} I_{\ell}$ $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ L'amplitude de la fluctuation de la puissance par rapport à sa valeur moyenne est appelée puissance apparente S
Puissance complexe totale	$\underline{S} = 3U_{ph} I_{ph} e^{j\varphi}$ $\underline{S} = \sqrt{3} U_{\ell} I_{\ell} e^{j\varphi}$
Puissance instantanée totale	$p(t) = u_{UX}(t) i_{UX}(t) + u_{VY}(t) i_{VY}(t) + u_{WZ}(t) i_{WZ}(t)$ Pour un système symétrique à charge équilibrée on obtient $p(t) = P = 3U_{ph} I_{ph} \cos\varphi$ $p(t) = P = \sqrt{3} U_{\ell} I_{\ell} \cos\varphi$ La puissance instantanée totale est **constante** (pas de composante pulsante) et égale à la **puissance active totale**.

Conversion triangle – étoile



Demeurent inchangées :

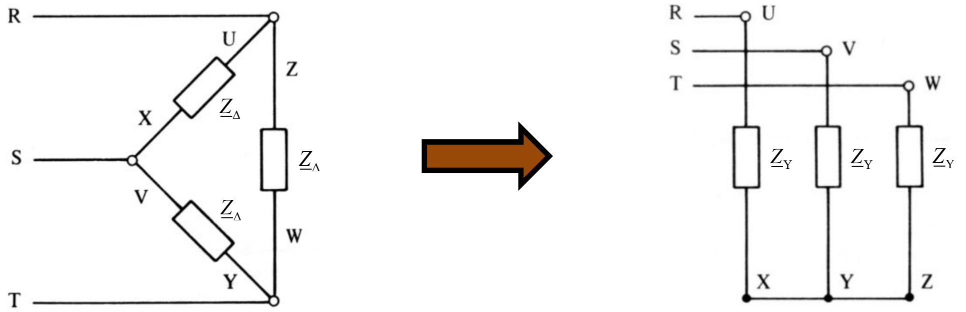
- La source d'alimentation
- Les tensions de ligne
- Les impédances de la charge

Le passage d'un montage en triangle à celui en étoile d'une charge d'impédances est utilisé pour :

- Obtenir une réduction momentanée de la puissance.
  Technique largement utilisée pour le démarrage de moteurs asynchrones
- Permettre l'adaptation à un réseau ayant une tension $\sqrt{3}$ plus élevée.
  Les appareils fonctionnant sur un ancien réseau de $220\ \mathrm{V}$ en triangle ($127\ \mathrm{V}$ en étoile) peuvent être utilisés dans un réseau moderne $400\ \mathrm{V}$ à condition de passer au mode étoile

Montage en triangle **Δ**	Montage en étoile **Y**
$U_{\mathrm{ph}} = U_\ell$	$U_{\mathrm{ph}} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_\ell$
La tension de phase est réduite d'un facteur $\sqrt{3}$	
$I_{\mathrm{ph}} = \frac{U_{\mathrm{ph}}}{Z} = \frac{U_\ell}{Z}$	$I_{\mathrm{ph}} = \frac{U_{\mathrm{ph}}}{Z} = \frac{U_\ell}{\sqrt{3}Z}$
Le courant de phase est réduit d'un facteur $\sqrt{3}$	
$I_\ell = \sqrt{3}\, I_{\mathrm{ph}} = \sqrt{3}\frac{U_{\mathrm{ph}}}{Z} = \sqrt{3}\frac{U_\ell}{Z}$	$I_\ell = I_{\mathrm{ph}} = \frac{U_{\mathrm{ph}}}{Z} = \frac{U_\ell}{\sqrt{3}Z}$
Le courant de ligne est réduit d'un facteur 3	
$P = 3U_{\mathrm{ph}} I_{\mathrm{ph}} \cos\varphi = 3U_\ell \frac{U_\ell}{Z}\cos\varphi = 3\frac{U_\ell^2}{Z}\cos\varphi$	$P = 3U_{\mathrm{ph}} I_{\mathrm{ph}} \cos\varphi = 3\frac{U_\ell}{\sqrt{3}}\frac{U_\ell}{\sqrt{3}Z}\cos\varphi = \frac{U_\ell^2}{Z}\cos\varphi$
La puissance absorbée par la charge devient trois fois plus faible.	

Conversion d'un montage triangle en un montage étoile équivalent



Demeurent inchangées :

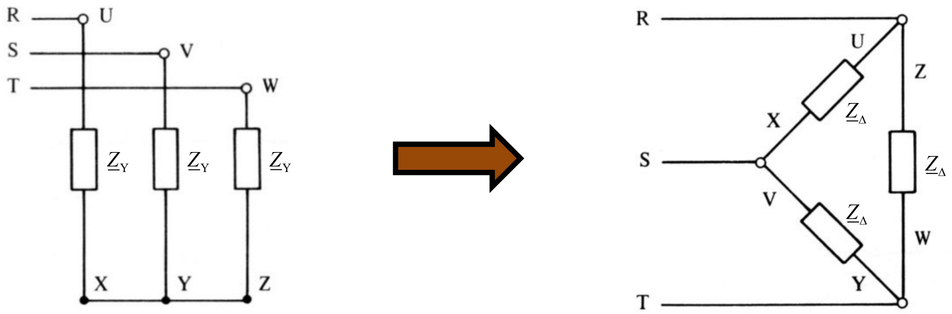
- La source d'alimentation
- Les tensions et les courants de ligne
- La puissance consommée

Le passage d'un montage en triangle à celui équivalent en étoile d'une charge d'impédances est utilisé pour simplifier les calculs lors de la mise en équation d'un circuit électrique.

Dans les cas d'une charge équilibrée, on obtient :

$$\underline{Z}_Y = \frac{1}{3}\underline{Z}_\Delta$$

Conversion d'un montage étoile en un montage triangle équivalent



Demeurent inchangées :

- La source d'alimentation
- Les tensions et les courants de ligne
- La puissance consommée

Le passage d'un montage en triangle à celui équivalent en étoile d'une charge d'impédances est utilisé pour simplifier les calculs lors de la mise en équation d'un circuit électrique.

Dans les cas d'une charge équilibrée, on obtient :

$$\underline{Z}_\Delta = 3\underline{Z}_Y$$

Systèmes triphasés non symétriques

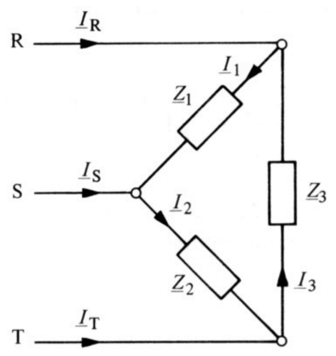
Un état de fonctionnement non symétrique apparaît lorsque les impédances de la charge ne sont pas identiques.
Situation généralement provoquée par le branchement de charges monophasées (par ex. équipements ménagers) raccordées :

- Soit entre un conducteur de phase et le conducteur neutre
- Soit entre deux conducteurs de phase

Elle peut aussi intervenir en cas de perturbation telle que :

- Court-circuit
- Ouverture d'une phase

Systèmes triphasés non symétriques – Charge en triangle



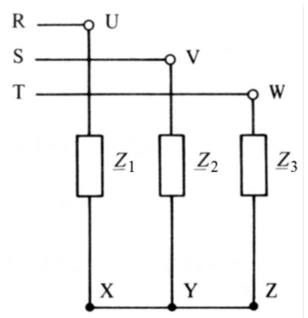
Courants de phase et de ligne

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{RS}}{\underline{Z}_1} \qquad \underline{I}_R = \underline{I}_1 - \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ST}}{\underline{Z}_2} \qquad \underline{I}_S = \underline{I}_2 - \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{TR}}{\underline{Z}_3} \qquad \underline{I}_T = \underline{I}_3 - \underline{I}_2$$

Systèmes triphasés non symétriques – Charge en étoile – Configuration 1

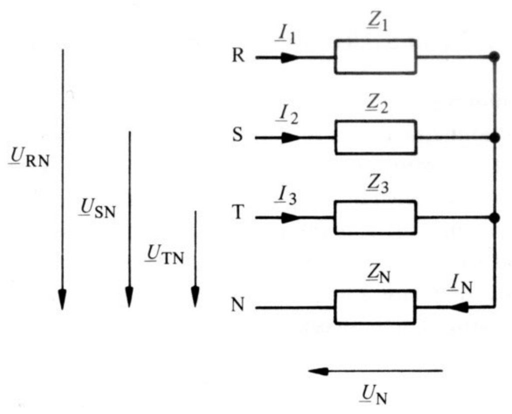


Le point neutre de la charge **n'est pas** relié au point neutre de la source triphasé.

Pour le calcul, on remplace la charge en étoile par une charge en triangle équivalente.

On est alors ramené au cas précédent.

Systèmes triphasés non symétriques – Charge en étoile – Configuration 2



Le point neutre de la charge **est** relié au point neutre de la source triphasé.

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{RN} - \underline{U}_N}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{I}_S = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{SN} - \underline{U}_N}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{I}_T = \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{TN} - \underline{U}_N}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_N}$$

Tension complexe entre les points neutres $\underline{U}_N$:

$$\underline{U}_N = \underline{Z}_p \underline{I}_{N0}$$

Avec

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_N}$$

$$\underline{I}_{N0} = \frac{\underline{U}_{RN}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{TN}}{\underline{Z}_3}$$

FORMULAIRE

Fonctions trigonométriques

Angle θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
$0^\circ = 0$	0	1	0	∞
$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$105^\circ = \frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3}-1)$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$
$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
$165^\circ = \frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$
$180^\circ = \pi$	0	-1	0	∞
$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0

- relations entre fonctions

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ; \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- formules de réduction

$$\sin\alpha = +\cos(\alpha-90^\circ) = -\sin(\alpha-180^\circ) = -\cos(\alpha-270^\circ)$$
$$\cos\alpha = -\sin(\alpha-90^\circ) = -\cos(\alpha-180^\circ) = +\sin(\alpha-270^\circ)$$
$$\tan\alpha = -\cot(\alpha-90^\circ) = +\tan(\alpha-180^\circ) = -\cot(\alpha-270^\circ)$$
$$\cot\alpha = -\tan(\alpha-90^\circ) = +\tan(\alpha-180^\circ) = -\tan(\alpha-270^\circ)$$

- somme et différence d'angles

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$

- angle double

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- angle moitié

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/2} \quad ; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

- produit de fonctions trigonométriques

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

- somme et différence de fonctions trigonométriques

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$$
$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

- élévation au carré

$$\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$$

$$\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

- relations exponentielles

$$\exp(j\alpha) = \cos\alpha + j\sin\alpha \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\sin\alpha = \frac{\exp(j\alpha) - \exp(-j\alpha)}{2j}$$

$$\cos\alpha = \frac{\exp(j\alpha) + \exp(-j\alpha)}{2}$$

FORMULAIRE

Dérivées

Fonction	Dérivée
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x

Primitives

Fonction	Primitive
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin(2x)}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\sin(x)\cos(x)\right)$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin(2x)}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\sin(x)\cos(x)\right)$

FORMULAIRE

Les nombres complexes

Nombre complexe	
$\underline{z} = a + \mathrm{j}b$	$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ $\quad \mathrm{j}^2 = -1$ $\quad \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}$ $\quad \mathrm{j}^4 = 1$ $\quad \ldots$

Conjugué complexe	
$\underline{z} = a + \mathrm{j}b$	$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}b$

Algèbre des nombres complexes

Soit les deux nombres complexes :

$$\underline{z}_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \quad ; \quad \underline{z}_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$

Égalité

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 \quad \text{si} \quad a_1 = a_2 \quad \text{et} \quad b_1 = b_2$$

Addition et soustraction

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}(b_1 + b_2)$$

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}(b_1 - b_2)$$

$$\underline{z} + \underline{z}^* = 2a$$

Multiplication

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{j}(b_1a_2 + a_1b_2)$$

$$\underline{z} \cdot \underline{z}^* = a^2 + b^2$$

Division

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\underline{z}_1\underline{z}_2^*}{\underline{z}_2\underline{z}_2^*} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{j}\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Conjugué complexe des opérations élémentaires

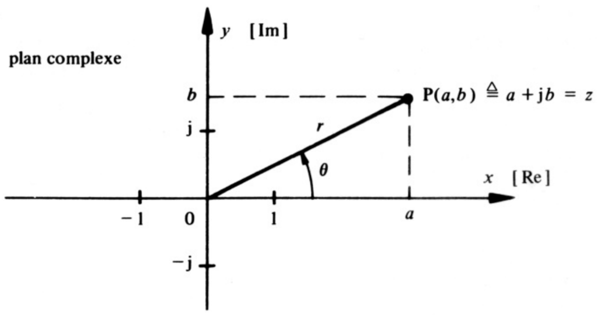
$$(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* + \underline{z}_2^*$$

$$(\underline{z}_1 - \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* - \underline{z}_2^*$$

$$(\underline{z}_1\underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^*\underline{z}_2^*$$

$$(\underline{z}_1 / \underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^* / \underline{z}_2^*$$

Représentation géométrique



$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b \quad ; \quad a = r\cos\theta \quad ; \quad b = r\sin\theta$$

Module : $r = |\underline{z}| = |a + \mathrm{j}b| = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathrm{OP}$

Argument : $\theta = \arg(\underline{z}) = \arctan\dfrac{b}{a}$

Ainsi : $\underline{z} = a + \mathrm{j}b = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$

Formule d'Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$

Conjugué complexe

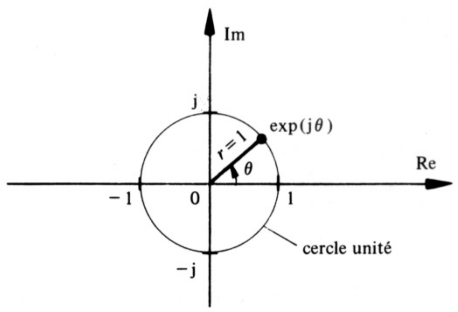
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = \cos\theta - \mathrm{j}\sin\theta$$

Addition et soustraction

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right)$$

Valeurs particulières



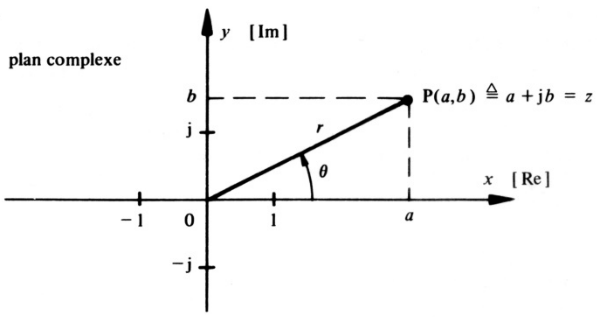
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k2\pi} = 1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi + k2\pi)} = -1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2 + k2\pi)} = \mathrm{j}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\pi/2 + k2\pi)} = -\mathrm{j}$$

Forme exponentielle



$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b = r\cos\theta + \mathrm{j}r\sin\theta = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

Algèbre des nombres complexes à l'aide de la forme exponentielle

Soit les deux nombres complexes :

$$\underline{z}_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1} \quad ; \quad \underline{z}_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}$$

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

Multiplication

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1 + \theta_2)}$$

Module : $r_1 r_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$

Division

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1 - \theta_2)}$$

Module : $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Inverse

$$\underline{z}_2 = \underline{z}_1^{-1} = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_2)} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{1}{r_1} \quad ; \quad \theta_2 = -\theta_1$$

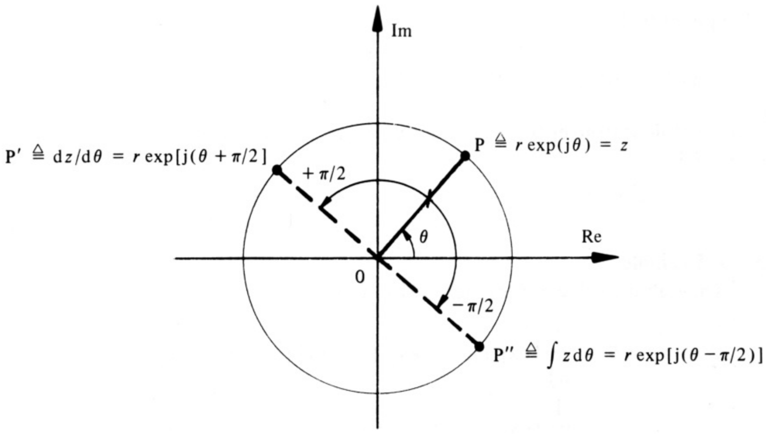
Dérivation

$$\frac{\mathrm{d}\underline{z}}{\mathrm{d}\theta} = r\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta + \pi/2)}$$

Intégration

$$\int \underline{z}\,\mathrm{d}\theta = r\mathrm{j}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta - \pi/2)}$$

Représentation géométrique de la dérivation et de l'intégration



$$\frac{\mathrm{d}\underline{z}}{\mathrm{d}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta + \pi/2)}$$

$$\int \underline{z}\,\mathrm{d}\theta = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta - \pi/2)}$$

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta$$

Forme exponentielle de la formule de Moivre

$$\underline{z}^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta} = r^n(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{j}\sin n\theta)$$