# $\mathbb{R}$

## Sup / inf

- Max : le + grand
- Min : + petit

} ∃ x d'office

min — max

- Majorant : + grand que tout l'ensemble
- Minorant : + petit "

borné : les deux ]—[ +

- Sup : + petit Maj
- inf : + grand Min

Si ∃ max / min → Sup = Max, inf = min

x ⊖ —— ⊖ x

### axiome

$\forall A \neq \emptyset$

Majoré → ∃ sup A

minoré → ∃ inf A

x Maj → sup A := +∞

x min → inf := −∞

## Symbole

orthographe

× / ÷

x > ≥ < ≤

[ [ ] ]

intervalle { }

↳ $\mathbb{R}^{+}$ $\mathbb{R}^{*}$ $\mathbb{R}_{+}^{*}$ $\mathbb{R}_{-}^{*}$

$]0;+\infty[$ $]-\infty;0[$

## $\sqrt{2}$

→ ∃ x t.q. : $x^2 = 2$

⇒ $x^n = y$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall y \in \mathbb{R}_+$

∃ une solu

↳ $\sqrt[n]{y} = x$

0 1 $\sqrt{2}$ 2 3 π

## Densité

"dense dans $\mathbb{R}$"

↳ $\forall x > y \in \mathbb{R}$

∃ z ∈ ℝ t.q. $x > z > y$

↳ $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

→ $\lfloor x \rfloor$ = le + grand $n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n \leq x$

1 $\sqrt{2}$ 2

$\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$

## |x|

$|x_1 - x_2| = \text{dist}(x_1; x_2)$

Prop : inégalité triangulaire

$|x + y| \leq |x| + |y|$

## Ensemble ouvert - fermé

↳ ouvert : ∃ toujours un nombre avant et après chaque nombres

$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$ t.q. $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset A$

fermé : complémentaire ouvert

↳ $G^c := \mathbb{R} \setminus G$

G : A + B ⇒ ouvert

↳ ouvert ⇒

## déf

$\bar{z} := a - bi$

$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$

$Re := a = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$Im := b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$Arg(z) = \theta$

$Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$,

$Arg(z \cdot z') = Arg(z) + Arg(z')$

$Arg(z^n) = n \, Arg(z)$

nombres purement imaginaire :

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$

## forme

$z = a + bi = (a ; b)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$z + z' = (a + a' ; b + b')$

$z \cdot z' = (aa' - bb' ; a'b + ab')$

Polaire : $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

Exp : $e^z = e^{Re}(\cos(Im) + i \sin(Im))$

$|e^z| = e^{Re}$

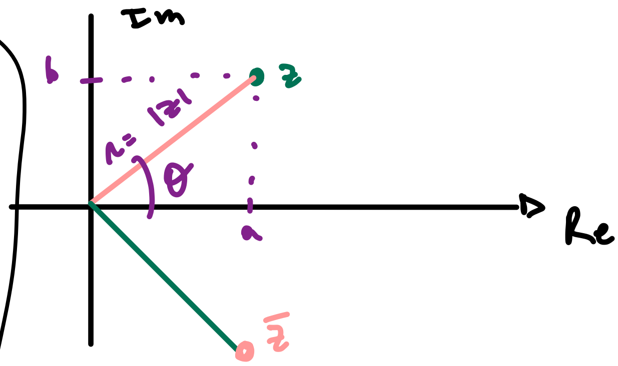
$Arg(e^z) = Im$

Exp/polaire : $r e^{i\theta}$

# $\mathbb{C}$

$i^2 = -1$

## Plan



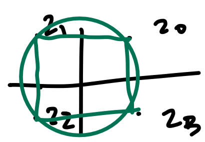

## thm

- $\tan\theta = \frac{b}{a}$ $\quad \forall a \neq 0$
- Formule de moivre : $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ $= r^n e^{ni\theta}$ $\quad \forall n \geq 2$
- $\forall w \in \mathbb{C}$ $(|w| = r, Arg(w) = \theta)$ :
  $z \cdot w \Rightarrow$ tourné z d'un angle $\theta$ + multiplié son module par r.
- $e^{i\pi} + 1 = 0$
  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
  $e^{i2k\pi} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $P(z)$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k$
  $\Rightarrow P(z_*) = 0$
  $\Rightarrow P(\overline{z_*}) = 0$

→ si P, avec $n = 2k+1$ et $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k$
$\Rightarrow$ au moins 1 $z_k \in \mathbb{R}$

→ tout $P(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ $\forall k$ peut se fact en produit polynôme $\mathbb{R}$ de degré 1 ou 2 irreductible eux aussi à coef $\mathbb{R}$.

$P(x) = x^4 + 1 = P(z) = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$




## Racines

$z^n = w$ $\quad \forall w, z \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$

thm : soit $w = s e^{i\varphi}$, $s > 0$. $n \in \mathbb{N}_*$

$\Rightarrow$ racine de $w$ : $z_k = \sqrt[n]{s} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$

$k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

→ dépend n

## thm fondamentale de l'algèbre

$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_n z^n$

$z_* \in \mathbb{C}$ t.p. $P(z_*) = 0$ → racine.

thm : Dans $\mathbb{C}$, tout P avec $n \geq 1$ possède au moins une racine.

$P(z)$ avec $n \geq 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé $\Rightarrow \exists \, Q(z)$ avec $n' = n-1$ t.p. :

$P(z) = (z - z_0) Q(z) + P(z_0) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

le intéret $= 0$.

→ Dans $\mathbb{C}$, tout P avec $n \geq 1$ possède n racine :

$\exists \, z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}$ t.p. : $P(z_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

et : $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$

→ racine ≠ necessairement distincte $\Rightarrow (z - z_1)^{\alpha}$

## FACtorisat°

- trouver z, par tatonnement → div. euclidienne $\left(\frac{P(z)}{z - z_1} \Rightarrow (z - 1) Q(z)\right)$ → recommencer.

# Suite $\mathbb{R}$

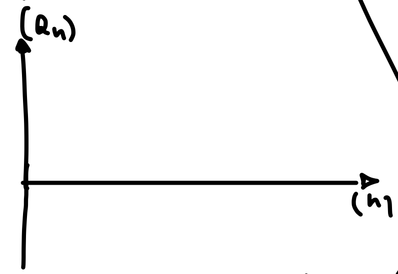
$L = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}$

## def

croissante : $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$
décroissante : $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$
monotone si un des deux.

convergent : $\exists L$
divergent : $\nexists L$ $(L = \pm\infty)$

$(a_n)_{n \geq n_0}$




{ Majoré, $\exists$ cst $M$ t.q. $a_n \leq M$ $\forall n$
{ minoré, " $m$ " $\geq m$ $\forall n$
borné si les 2.

### limite sup / inf

$M_n := \sup\{a_n, a_{n+1} \dots\}$ décroissante min
$m_n := \inf\{a_n, a_{n+1} \dots\}$ croissante Max
$m_n \leq a_n \leq M_n$ "les convergents"

$\limsup a_n := \lim M_n$
$\liminf a_n := \lim m_n$

$\lim a_n = L \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = L$

## limite

tends vers $L$ : $\lim_{n\to\infty}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $|a_n - L| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq N$

si $\exists L \Rightarrow$ unique
$a_n$ converge $\Rightarrow a_n$ bornée
$a_n \to L \Rightarrow |a_n| \to |L|$
opérat : $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
$a_n \geq b_n \Rightarrow \lim a_n \geq \lim b_n$ $\forall n$ suff. gd

$a_n \to \infty$ si $\forall M > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}$ t.p. $a_n \geq M$ $\forall n \geq N$

Soit $a_n \to \infty$ :
- $\frac{1}{a_n} \to 0$
- $b_n \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n \to \infty$
- $b_n$ borné $\Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to 0$
- $b_n \geq \delta > 0$ $\forall n$ suff. gd $\Rightarrow a_n \cdot b_n \to \infty$

## indéterminé

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\infty - \infty$ | $0 \cdot \infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$ |
| $1^\infty$ | $\infty^0$ | $0^0$ | |

→ extraire le terme dominant
→ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

thm : $\lim_{x\to 0}$ :
- $\frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\frac{\log(x+1)}{x} = 1$

équivalence
- $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \infty \cdot 0$
- $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty} = e^{\log a_n - \log b_n} \Rightarrow e^{\infty - \infty}$
- $a_n^{b_n} = 1^\infty = e^{b_n \log a_n} = e^{\infty \cdot 0}$

## Série géométrique

$S_n := 1 + r + r^2 + r^3 \dots r^n$

$\lim_{n\to\infty}$ :
- $r \geq 1 \Rightarrow S_n \to +\infty$
- $|r| < 1 \Rightarrow S_n \to \frac{1}{1-r}$
- $r \leq -1 \Rightarrow$ diverge

$e_n := (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow$
- strictement croissant
- $2 \leq e_n \leq 3$

$\Rightarrow \lim e_n = e$ $\exists$

## thm Bolzano-Weierstrass

Sous suite $:= (b_k) = (x_{n_k})$

thm : de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
$(x_n) \in [a,b] \Rightarrow \exists L \in [a,b]$ et $\exists (x_{n_k}) \to L$

## Suite de Cauchy

une suite est de cauchy si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}$ t.p. $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ $\forall m,n \geq N$

+ on avance, + les termes sont proches les uns des autres (qd une suite converge)

thm : Dans $\mathbb{R}$ :
convergente $\Leftrightarrow$ de cauchy

## thm d'études

Chien méchant : $a_n \to \infty$, $a_n \leq b_n \Rightarrow b_n \to \infty$

thm deux gendarmes : $a_n \leq x_n \leq b_n$
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = L$

- Si $x_n$ borné, $y_n \to 0 \Rightarrow y_n x_n \to 0$

Monotone + borné : croissante + Max ou décroissante + min $\Leftrightarrow$ converge

Critère d'Alembert (suite) :
si $\exists$ $\rho := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
$\Rightarrow$
- $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow a_n \to 0$
- $\rho > 1 \Rightarrow a_n$ diverge
- $\rho > 1$, $a_n \geq 0$ $\forall n \Rightarrow a_n \to \infty$

comportement :
$\log(n) \leq n^c \leq C^n$, $c \in \mathbb{R}$

# Etude de cos simple

$x_{n+1} = g(x_n)$

$g(x) = 1 + \frac{x}{2}$

$x_0$

## methode 1

ecrire les premiers termes et observer

verifier les observat°

$\Rightarrow$ $x_0 > 2$ decroissante str.

$x_0 = 2$ cst

$x_0 < 2$ croissante str.

$\Rightarrow \lim x_n = 2$

les 2 autres on montre par reccurence : minoré/maj resp.

comme $\exists L$, on remplace dans l'équ.. les termes qui tende vers L

$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2} \Rightarrow L = 1 + \frac{L}{2}$

$\Rightarrow L = 2$

## Methode 2

on veut essayer d'exprimer $x_n$ en f° de n

$\hookrightarrow$ (par reccurence)

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n x_0 \longrightarrow 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ L depend $\times$ cdt initial

$\Rightarrow \underbrace{\lim x_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{=2}$

## Methode 3 : chercher une suite de Cauchy

$|x_{k+1} - x_k| = \frac{1}{2^k}\left|1 - \frac{x_0}{2}\right| \quad \forall k$

$\forall n > m : |x_n - x_m| = |(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m)|$

$\leq \sum_{k=m}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| = \left|1 - \frac{x_0}{2}\right| \left\{\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$

$m, n \to \infty \hookrightarrow \to 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\to x_n$ est de cauch

$\exists L \to$ méthode 1.

# Suite def reccurence

## def

**Suite défini par reccurence :**

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $(x_n)$ est def par

- son premier terme : $x_0 := x$
- par reccurence, $\forall n > 0$. $x_{n+1} = g(x_n)$

**Point fixe** : $x_*$ pt fixe si $g(x_*) = x_*$

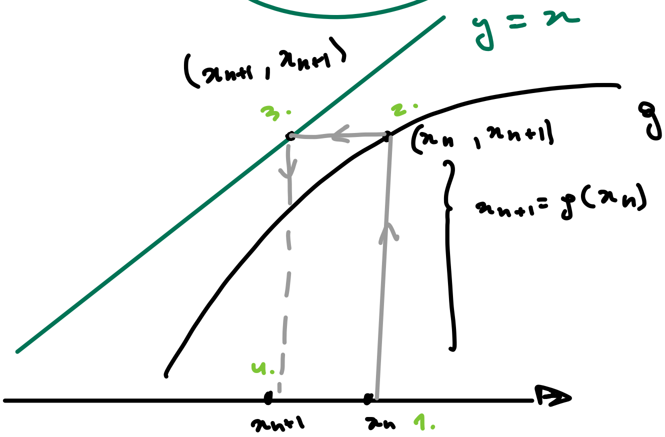
Si $x_0 = x_* \Rightarrow$ suite cst.

## thm

Si $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $\lim x_n = x_*$ de g

$\Rightarrow$ Si $\nexists$ de pt fixe $\Rightarrow \nexists$ de limite.

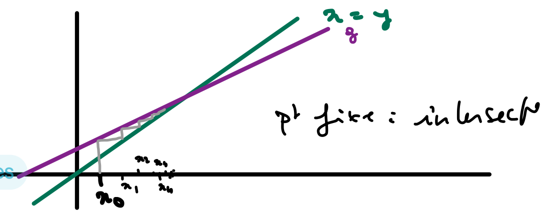
## graphique




construct° :

1. $(x_n, 0)$
2. monter (v) jusqu'au graph g : $x_n, g(x_n) = x_n, x_{n+1}$
3. glisser (h) jusqu'à $y = x$ pt $(x_{n+1} ; x_{n+1})$
4. redescendre (v) jusqu'à $(x_{n+1} ; 0)$

Ex :




## fract continue

$$2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 \dots}}}} = 1$$

# Série numérique

## déf + Prop

$\sum_n a_n = S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$S_0 := a_0$

$S_1 := a_0 + a_1$

$S_2 := a_0 + a_1 + a_2$

⚠ important, si non contradict $(1-1+1-1\dots)$

converge : $\lim_{n\to} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ \exists$

diverge : " $= \pm\infty$

- si $\sum_n a_n$ converge $\Rightarrow$ $a_n \to 0$ ($\not\Leftarrow$)
- si $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ converge :
  1. $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$
  2. $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- convergence dépend pas des fini termes (mais fini!) ok
  → modifie nbres arbitraire termes change rien.

Ex : $c_n := \begin{cases} b_n & \text{si } n < 10^{10^{10}} \\ a_n & \text{si } n \geq 10^{10^{10}} \end{cases}$

$c_n$ converge / diverge iff $a_n$ converge / diverge.

## $\sum_n \frac{1}{n^p}$

thm : $p \in \mathbb{R}$ fixé.

si $p > 1 \to$ converge

si $p \leq 1 \to$ diverge.

⚠ très sensible : $\frac{1}{n^{1.000001}} < \infty$

$\frac{1}{n^{0.999999}} = \infty$

## $\sum_n \alpha^n$

- si $|\alpha| < 1 \to$ converge
- si non $\to$ diverge.

## Série télescopique

$\sum_{n\geq 1} \underbrace{x_n - x_{n-1}}_{a_n} \quad \forall n \geq 1$

thm : Si $x_n \to L$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge et vaut : $\lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) = L - x_0$

## Série dépendant d'un paramètre

$x \longrightarrow f(x) := \sum_{n\geq 1} a_n(x)$

$f : I \to \mathbb{R}$

$D(f) = \{ x \in I \mid \sum_{n\geq 1} a_n(x) \text{ converge} \}$

Ex : $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$

↳ $D(f) = \mathbb{R}$ : continue partout, dérivable nulle part

## $\sum_n a_n$ converge absolument : $\sum_n |a_n|$ converge

thm : $\sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge


## théorème d'étude

### critère comparaison :

Soit $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n > N \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$
- si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

### Limite quotient

$a_n, b_n > 0 \quad \forall n \geq N \in \mathbb{Z}$

$\exists\, \alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

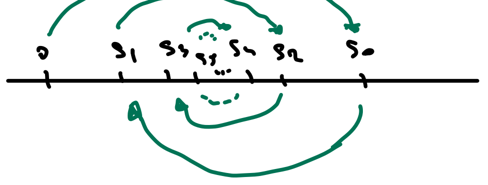
si $\alpha > 0 \Rightarrow \sum a_n$ et $\sum b_n$ converge / diverge } à deux

### critère de Leibniz

Soit $a_n = (-1)^n x_n$

si :
1. $x_n \geq 0$
2. $x_n$ décroissant
3. $x_n \to 0$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ converge




### critère de d'Alembert

$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \exists$ ou est $+\infty$

$\Rightarrow$
- si $\rho < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- " $>$ " $\Rightarrow$ " diverge
- si $= 1 \Rightarrow$ ne dit rien

### critère de Cauchy :

$\sigma := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

ou $\sigma := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$\Rightarrow$
1. si $\sigma < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
2. " $>$ " $\Rightarrow$ " diverge

# fonct° ℝ

## Monotonie

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

**croissante** : $f(x) \leq f(x')$ $\forall x, x' \in I$ et $x < x'$

**décroissante** : $f(x) \geq f(x')$ $\forall x, x' \in I$ et $x > x'$

CST si les deux

**Variat°** : étude : trouver intervalle sur laquelle $f°$ croissante / décroissante.

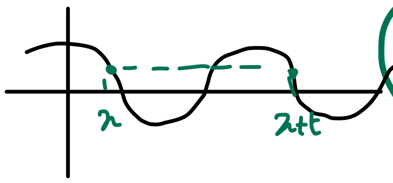
## Périodicité

**$f$ est $t$-périodique**

$t > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x+t) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$t$ min = la période de $f$ = $T$



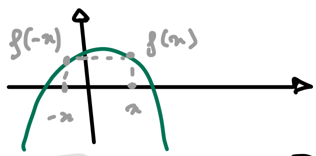

**thm** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_f$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_g$

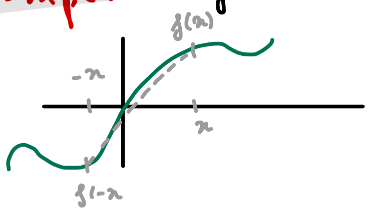
Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f \pm g$ périodique

## Parité / imparité

**Parité** : $f : D \to \mathbb{R} \Rightarrow f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D$




**imparité** : $f : D \to \mathbb{R} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D$




$\to$ montrer que non : contre exemple.

**thm** : Si $D$ est symétrique, $\forall f : D \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une $f°$ paire et une impaire

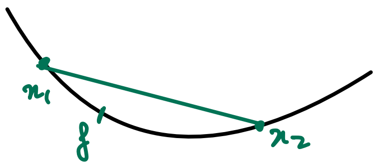
## Convexité / concavité

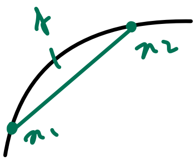
intervalle $I$ ($\times$ d'office borné) $x_1 < x_2$

$f : I \to \mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$

**convexe** : $\forall x_1, x_2 \in I$ : $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$

**concave** : si $-f$ est convexe ( " $\geq$ " )




## Min / Max, Sup / inf

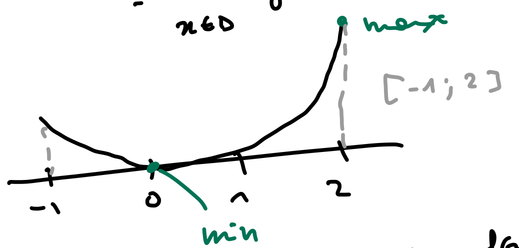
$f : D \to \mathbb{R}$

**max (global)** : $\exists x^* \in D$ t.q. $f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x \in D$

$= \max_{x \in D} f(x)$ : "max atteint en $x^*$"

**min (global)** : $\exists x_* \in D$ t.q. $f(x) \geq f(x_*)$ $\forall x \in D$

$= \min_{x \in D} f(x)$ : "min atteint en $x_*$"




**thm** : $f : D \to \mathbb{R}$

1. si $A \subset B \subset D \to \sup_A f \leq \sup_B f$

   $\inf_A f \geq \inf_B f$
2. $\sup_D (-f) = -\inf_D f$
3. $\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g$
4. si $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup_A (\alpha f + \beta) = \alpha \sup_A f + \beta$

**Majorant** : $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \leq M$ $\forall x \in D$

**Minorant** : $\exists m \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \geq m$ $\forall x \in D$

borné si les deux.

**$\sup f$** = si majoré $\to$ + petit majorant

si non $\to +\infty$

**$\inf f$** = si minoré $\to$ + grand minorant

si non $\to -\infty$

= Max / min si $\exists$

# Limites de fonct°

## def : voisinage épointé :

$V = ]x_0 - \alpha, x_0[ \cup ]x_0, x_0 + \alpha[ \ , \alpha > 0$

$f$ définie dans voisinage si $\exists V$ t.q $f(x)$ défini $\forall x \in V$

## limite en 1 pt :

$f \to L \in \mathbb{R}$ quand $x \to x_0$ :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ quand $0 < |x - x_0| \leq \delta$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

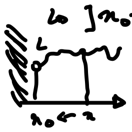
## limite latérale .

$x \to x_0^+$

$\hookrightarrow ]x_0, x_0 + \alpha[$

$x \to x_0^-$

$\hookrightarrow ]x_0 - \alpha, x_0[$




## si $L \ \exists \Rightarrow$ unique

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ iff $a_n \neq x_0 \ \forall n$ et $a_n \to x_0$ qd $n \to \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

**montrer que lim $\nexists$**

$\to$ suite

$\to$ lim latéral $\nexists$

$\to$ lim latérales $\neq$

## 2 gendarmes

$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in V$

si $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

## Propriétés

$\lim f \pm g = \lim f \pm \lim g$

$\lim f \cdot g = \lim f \cdot \lim g$

$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim f \leq \lim g$

## limite $\infty$,

$x \to x_0$

$+\infty$ $M > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q $f(x) \geq M$ quand $0 < |x - x_0| \leq \delta$

$-\infty$ $M < 0$ $\hookrightarrow$ limite $x \to x_0^+$ : $x_0 < x \leq x_0 + \delta$

$\hookrightarrow$ $x \to x_0^-$ : $x_0 - \delta \leq x < x_0$

## indéterminat° $\frac{0}{0}$

Polynomes $\to$ factorisat° $(x - x_0)$

méthode du conjugué

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## $f(x) \to \infty$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
- $g \to \infty \Rightarrow f + g = \infty$ et $f \cdot g = \infty$
- $g$ borné $f + g = +\infty$, $\frac{g}{f} = 0$
- $g \to L \neq 0$ : $f \cdot g = +\infty$ $L > 0$ ; $-\infty$ $L < 0$
- $\delta > 0$ t.q. $g \geq \delta \in V \Rightarrow f \cdot g = +\infty$
- $g \geq f \ \forall x \in V \ g(x) = +\infty$

## Limites finies

1. $\mathrm{Dom}(f) = ]a, +\infty[$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ t.q. $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ quand $x \geq N$

## limite infinies

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ iff $\forall M > 0 \ \exists N > 0$ t.q. $f(x) \geq M$ dès que $x \geq N$

# Continuité

**déf** $D \to \mathbb{R}$

$D \subset \mathbb{R}$ ouvert

si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f$ continue

si $\lim \nexists$ ou $\neq f(x_0)$

$\to f$ discontinue

## Fonct° élémentaires

- polynômes continue sur $\mathbb{R}$
- sin & cos continue sur $\mathbb{R}$

  tan continue $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- $a^x$ $\forall a > 0$ continue sur $\mathbb{R}$
- $\log_a(x)$ $\forall a > 0$ continue sur $\mathbb{R}^*_+$

## Continue latérale

$\to f$ continue à gauche : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$\to f$ continue à droite : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

**thm** : $f$ continue iff continue à gauche et à droite.

## Continuité sur un intervalle compacte

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur :

- continue en tout $x_0 \in ]a,b[$
- continue à droite $x_0 = a$
- continue à gauche $x_0 = b$

**thm** : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$\Rightarrow$ Alors $f$ bornée.

**thm** : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$f$ atteint son max et min

## Prolongement

$x_0 \in I$, $I' := I \setminus \{x_0\}$

si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\exists$

$\Rightarrow f(x_0) := L$

## Valeurs intermédiaires

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$f(a) < f(b)$

alors $\forall h$ : $f(a) < h < f(b)$

$\to \exists c \in ]a,b[$ t.q. $f(c) = h$

$\Rightarrow$ polynômes à coef $\mathbb{R}$ de degrés impaire possède au moins 1 racine $\mathbb{R}$

**thm** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Im$(f)$ fermé et borné

donné par : Im$(f) = [\min f(x), \max f(x)]$

## Continuité et calcul de limite

$\lim f(g(x))$ et $g(x) \to y_0$

et $f$ continue en $y_0$

alors : $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = f(y_0)$